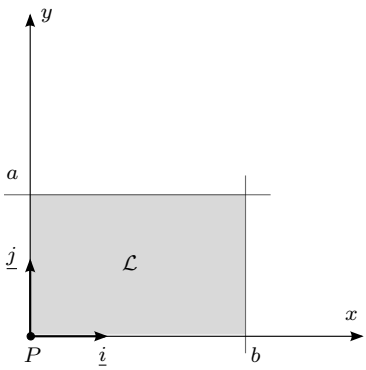
Esercitazione 4

(5.11.2012)

Esercizio 1



Con riferimento alla lamina rettangolare omogenea di figura, si calcolino le componenti nella base $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ del tensore d'inerzia in P.
La lamina occupa il dominio dello spazio euclideo tridimensionale

$$\mathcal{L} = \{(x, y, z) |\, x \in [0, b], y \in [0, a], z = 0\}$$

Indicando con $\underline{\underline{I}}(P)$ il tensore d'inerzia in P e con μ la densità per unità di area della lamina, le componenti di $\underline{\underline{I}}(P)$ nella base $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ sono raccolte nella matrice d'inerzia

$$I = \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}$$

con

$$A := \iint_{\mathcal{L}} \mu(y^2 + z^2)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad B := \iint_{\mathcal{L}} \mu(x^2 + z^2)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
$$C := \iint_{\mathcal{L}} \mu(x^2 + y^2)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad D := -\iint_{\mathcal{L}} \mu xy\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
$$E := -\iint_{\mathcal{L}} \mu xz\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad F := -\iint_{\mathcal{L}} \mu yz\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Posto $M = \mu ab$, si ha quindi

$$A = \mu \int_0^b \mathrm{d}x \int_0^a y^2 \, \mathrm{d}y = \mu \frac{a^3 b}{3} = \frac{Ma^2}{3}$$

$$B = \mu \int_0^b x^2 \, \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y = \mu \frac{ab^3}{3} = \frac{Mb^2}{3}$$

$$C = \mu \int_0^b \Big(\int_0^a (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}y \Big) \, \mathrm{d}x = \mu \frac{a^3 b + ab^3}{3} = \frac{M(a^2 + b^2)}{3}$$

$$D = -\mu \int_0^b x \, \mathrm{d}x \int_0^a y \, \mathrm{d}y = -\mu \frac{a^2 b^2}{4} = -\frac{Mab}{4}$$

$$E = F = 0$$

ossia

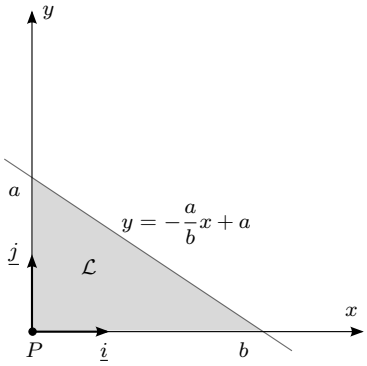
$$I = M \begin{bmatrix} \frac{a^2}{3} & -\frac{ab}{4} & 0 \\ -\frac{ab}{4} & \frac{b^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2 + b^2}{3} \end{bmatrix}$$

Si noti come, per $z = 0$, risulti

$$C = A + B$$

Si osserva che, essendo $D \neq 0$, la terna scelta non è principale d'inerzia.

Esercizio 2



Con riferimento alla lamina triangolare omogenea di figura, si calcolino le componenti nella base $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ del tensore d'inerzia in P.

La lamina occupa il dominio dello spazio euclideo tridimensionale

$$\mathcal{L} = \{(x, y, z) | \, x \in [0, b], y \in [\alpha(x), \beta(x)], z = 0\}$$

con

$$\alpha(x) = 0, \qquad \beta(x) = -\frac{a}{b}x + a$$

Indicando con $\underline{\underline{I}}(P)$ il tensore d'inerzia in P e con μ la densità per unità di area della lamina, le componenti di $\underline{\underline{I}}(P)$ nella base $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ sono raccolte nella matrice d'inerzia

$$I = \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}$$

con

$$A := \iint_{\mathcal{L}} \mu(y^2 + z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \quad B := \iint_{\mathcal{L}} \mu(x^2 + z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

$$C := \iint_{\mathcal{L}} \mu(x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \quad D := -\iint_{\mathcal{L}} \mu xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

$$E := -\iint_{\mathcal{L}} \mu xz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \quad F := -\iint_{\mathcal{L}} \mu yz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

Posto $M = (\mu ab)/2$, si ha quindi

$$A = \mu \int_0^b \Big(\int_0^{-\frac{a}{b}x+a} y^2 \, \mathrm{d}y \Big) \, \mathrm{d}x = \frac{\mu}{3} \int_0^b \Big(-\frac{a}{b}x + a \Big)^3 \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\mu}{12} \Big[\Big(-\frac{a}{b}x + a \Big)^4 \Big(-\frac{b}{a} \Big) \Big]_0^b = \frac{\mu}{12} b a^3 = \frac{M a^2}{6}$$

$$B = \mu \int_0^b \Big(\int_0^{-\frac{a}{b}x+a} x^2 \, \mathrm{d}y \Big) \, \mathrm{d}x = \mu \int_0^b x^2 \Big(-\frac{a}{b}x + a \Big) \, \mathrm{d}x$$

$$= \mu \Big(-\frac{ab^3}{4} + \frac{ab^3}{3} \Big) = \frac{\mu}{12} a b^3 = \frac{M b^2}{6}$$

$$C = A + B = \frac{M(a^2 + b^2)}{6}$$

$$D = -\mu \int_0^b \Big(\int_0^{-\frac{a}{b}x+a} xy \, \mathrm{d}y \Big) \, \mathrm{d}x = -\frac{\mu}{2} \int_0^b x \Big(-\frac{a}{b}x + a \Big)^2 \, \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\mu}{2} \Big(\frac{a^2 b^2}{4} + \frac{a^2 b^2}{2} - \frac{2a^2 b^2}{3} \Big) = -\frac{\mu}{24} a^2 b^2 = -\frac{Mab}{12}$$

$$E = F = 0$$

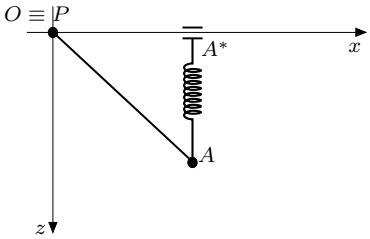
ossia

$$I = M \begin{bmatrix} \frac{a^2}{6} & -\frac{ab}{12} & 0 \\ -\frac{ab}{12} & \frac{b^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2+b^2}{6} \end{bmatrix}$$

Si osserva che, essendo $D \neq 0$, la terna scelta non è principale d'inerzia.

Esercizio 3

Una lamina rettangolare rigida e omogenea di massa m, lunghezza l e larghezza trascurabile è vincolata senza attrito in un piano verticale π. Detto z l'asse verticale e (O, x, z) il riferimento nel piano π, il vincolo impone che la lamina di estremi P ed A abbia $P \equiv O$ come punto fisso. Sulla lamina agisce una forza elastica $-k\underline{AA^*}$, essendo A^* la proiezione dell'estremo libero A della lamina sull'asse x. Si vuole



- *determinare le equazioni pure del moto;*
- *determinare la reazione vincolare nell'istante t_0 in cui $\theta_0 = \pi/2$ e $\dot{\theta}_0 = 0$;*
- *studiare l'equilibrio e la stabilità del sistema.*

Equazioni pure del moto

Detti $\underline{i}$ e $\underline{k}$ i versori degli assi x e z è possibile esprimere la posizione della lamina rigida tramite le coordinate dei suoi estremi P ed A

$$\underline{x}_P(t) = \underline{OP}(t) = x_P(t)\underline{i} + z_P(t)\underline{k}, \qquad \underline{x}_A(t) = \underline{OA}(t) = x_A(t)\underline{i} + z_A(t)\underline{k}$$

(nel seguito si ometterà, per brevità, l'indicazione della variabile temporale). I vincoli sono rappresentati dalle condizioni

$$\underline{x}_P = \underline{0}$$

ossia

$$x_P = 0, \qquad z_P = 0$$

Si hanno $N = 1$ corpo rigido e $M = 2$ vincoli olonomi bilateri, pertanto la generica configurazione del sistema è individuata da $n = 3N - M = 1$ parametro (coordinata lagrangiana). Si sceglie in particolare

$$q_1 = \theta$$

cioè l'angolo θ tra l'asse z e la direzione del vettore $\underline{OA}$. Introdotta la coordinata lagrangiana e tenuto conto dei vincoli, i vettori posizione di P ed A si scrivono

Risulta quindi

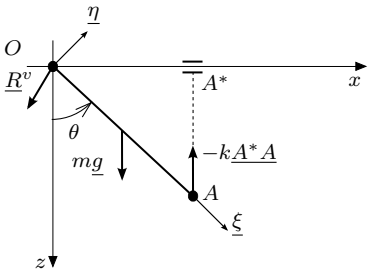
$$\cos\theta = \underline{k} \cdot \frac{\underline{OA}}{\|\underline{OA}\|}$$

$$\underline{x}_P = \underline{0}, \qquad \underline{x}_A = (l\sin\theta)\underline{i} + (l\cos\theta)\underline{k} \tag{1}$$

Stante il vincolo di punto fisso e liscio, le equazioni cardinali si scrivono

$$m\underline{a}_G = m\underline{g} - k\underline{A^*A} + \underline{R}^v \tag{2a}$$

$$\dot{\underline{J}}_O^{(rot)} = \underline{OG} \wedge m\underline{g} + \underline{OA} \wedge -k\underline{A^*A} \tag{2b}$$



avendo indicato con $\underline{R}^v$ la reazione vincolare. Dalla seconda equazione cardinale può ottenersi l'equazione pura del moto del sistema. Introdotta la terna principale d'inerzia $\{\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\zeta}\}$, la (2b) si scrive in termini di equazioni di Euler come

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = M_\xi \\ B\dot{q} + (A - C)pr = M_\eta \\ C\dot{r} + (B - A)pq = M_\zeta \end{cases} \tag{3}$$

con A, B e C momenti principali d'inerzia, p, q e r proiezioni del vettore velocità di rotazione nella base $\{\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\zeta}\}$ e M_ξ, M_η e M_ζ proiezioni nella stessa base del secondo membro della (2b).
I momenti principali d'inerzia si scrivono

Si vedano i risultati dell'esercizio 1, sotto l'ipotesi che

$$a \to 0, \qquad b = l$$

$$A = 0, \qquad B = C = \frac{ml^2}{3} \tag{4}$$

da cui, tenuto conto che il vettore velocità di rotazione $\underline{\omega}$ è pari a

$$\underline{\omega} = \dot{\theta}\underline{j} = \dot{\theta}\underline{\zeta} \qquad \Rightarrow \qquad p = q = 0, \quad r = \dot{\theta} \tag{5}$$

la seguente espressione delle (3)

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} = M_\zeta \end{cases} \tag{6}$$

I prodotti vettoriali a secondo membro della (2b) forniscono il termine M_ζ e si scrivono

Si ha infatti

$$\begin{cases} \underline{OG} = l/2\underline{\xi} \\ \underline{OA} = l\underline{\xi} \\ \underline{A^*A} = l\cos\theta\underline{k} \\ \underline{k} = \cos\theta\underline{\xi} - \sin\theta\underline{\eta} \end{cases}$$

$$\underline{OG} \wedge m\underline{g} = \begin{vmatrix} \underline{\xi} & \underline{\eta} & \underline{\zeta} \\ l/2 & 0 & 0 \\ mg\cos\theta & -mg\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \Big(-\frac{mgl}{2}\sin\theta\Big)\underline{\zeta}$$

$$\underline{OA} \wedge -k\underline{A^*A} = \begin{vmatrix} \underline{\xi} & \underline{\eta} & \underline{\zeta} \\ l & 0 & 0 \\ -kl\cos^2\theta & kl\sin\theta\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (kl^2\sin\theta\cos\theta)\underline{\zeta}$$

da cui l'equazione pura del moto

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} = -\frac{mgl}{2}\sin\theta + kl^2\sin\theta\cos\theta \tag{7}$$

Reazioni vincolari

Per il calcolo della reazione vincolare è sufficiente utilizzare la prima equazione cardinale. Allo scopo, si ricava l'espressione dell'accelerazione $\underline{a}_G$ come componenti nella base $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$

$$\begin{cases} x_G = \frac{l}{2}\sin\theta, \quad \dot{x}_G = \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta, \quad \ddot{x}_G = \frac{l}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{l}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta \\ y_G = \dot{y}_G = \ddot{y}_G = 0 \\ z_G = \frac{l}{2}\cos\theta, \quad \dot{z}_G = -\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta, \quad \ddot{z}_G = -\frac{l}{2}\ddot{\theta}\sin\theta - \frac{l}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta \end{cases} \tag{8}$$

Indicando le componenti di $\underline{R}^v$ con

$$\underline{R}^v = R^v_x\underline{i} + R^v_y\underline{j} + R^v_z\underline{k}$$

la prima equazione cardinale (2a) si proietta come

$$\begin{cases} m\ddot{x}_G = R^v_x \\ m\ddot{y}_G = R^v_y \\ m\ddot{z}_G = mg - kl\cos\theta + R^v_z \end{cases}$$

ovvero, ricordando le (8)

$$\begin{cases} R^v_x = m\Big(\frac{l}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{l}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\Big) \\ R^v_y = 0 \\ R^v_z = m\Big(-\frac{l}{2}\ddot{\theta}\sin\theta - \frac{l}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta\Big) - mg + kl\cos\theta \end{cases} \tag{9}$$

Nell'istante in cui $\theta_0 = \pi/2$, $\dot{\theta}_0 = 0$ il valore di $\ddot{\theta}(t_0)$ è fornito dall'equazione pura del moto (7)

$$\ddot{\theta}(t_0) = -\frac{3}{2}\frac{g}{l} \tag{10}$$

Per la reazione vincolare, l'applicazione delle (9) fornisce pertanto

$$R_x^v = 0, \qquad R_y^v = 0, \qquad R_z^v = -\frac{mg}{4}$$

Equilibrio e stabilità

Per il sistema in esame (a un grado di libertà e conservativo), l'equazione pura di moto è deducibile anche imponendo la conservazione dell'energia meccanica $E = T + V$. L'energia cinetica T può valutarsi rispetto al punto fisso come

$$T \equiv T^{(rot)} = \frac{1}{2}\big(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\big)$$

da cui, tenuto conto della (4) e della (5)

$$T = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2$$

L'energia potenziale V si scrive invece

$$V = -\frac{mgl}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}k\|A^*A\|^2 = -\frac{mgl}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}kl^2\cos^2\theta$$

La condizione che esprime la conservazione dell'energia meccanica si scrive quindi

$$\frac{\mathrm{d}(T+V)}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\Big(\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + \frac{mgl}{2}\sin\theta - kl^2\sin\theta\cos\theta\Big)$$

relazione identica alla (7).

Dalla equazione pura del moto (7) è immediato ottenere l'equazione di equilibrio come

$$0 = -\frac{mgl}{2}\sin\theta + kl^2\sin\theta\cos\theta \tag{11}$$

La medesima equazione, a meno eventualmente di una costante moltiplicativa e del segno, può essere ottenuta come punto di stazionarietà dell' energia potenziale del sistema V

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = 0 \Rightarrow \frac{mgl}{2}\sin\theta - kl^2\sin\theta\cos\theta = 0 \tag{12}$$

Tenuto conto che $\theta \in [0, 2\pi)$, dalla (11) si ottengono le seguenti posizioni di equilibrio

$$\theta = \Big\{0, \quad \pi\Big\}$$

e se $(mg/2kl) < 1$

$$\theta = \Big\{\arccos\Big(\frac{mg}{2kl}\Big), \quad 2\pi - \arccos\Big(\frac{mg}{2kl}\Big)\Big\}$$

L'energia cinetica T può valutarsi anche con il **teorema di König**

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\|\underline{v}_G\|^2 + T^{(rot)} \\ &= \frac{1}{2}m\|\underline{v}_G\|^2 + \frac{1}{2}(\bar{A}p^2 + \bar{B}q^2 + \bar{C}r^2) \\ &= \frac{1}{2}m\frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\frac{l^2}{12}\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

avendo fatto uso delle (8) e dei momenti d'inerzia

$$\bar{A} = 0, \qquad \bar{B} = \bar{C} = \frac{ml^2}{12}$$

Si ricorda che

$$\underline{A^*A} = l\cos\theta\underline{k}$$

Le posizioni di equilibrio $\mathsf{E}_i = \mathsf{E}_i(\theta_i)$ si scrivono quindi

$$\mathsf{E}_1 = \mathsf{E}_1\Big(0\Big), \quad \mathsf{E}_2 = \mathsf{E}_2\Big(\pi\Big)$$
$$\mathsf{E}_3 = \mathsf{E}_3\Big(\arccos\Big(\frac{mg}{2kl}\Big)\Big), \quad \mathsf{E}_4 = \mathsf{E}_4\Big(2\pi - \arccos\Big(\frac{mg}{2kl}\Big)\Big)$$

Applicando il **teorema di Dirichlet-Lagrange** e il **teorema di Ljapunov** è possibile stabilire se tali posizioni d'equilibrio sono stabili o instabili. Allo scopo si studia la derivata seconda di V, vedi equazione (12)

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{mgl}{2}\cos\theta - kl^2\Big(\cos^2\theta - \sin^2\theta\Big)$$

da cui

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{mgl}{2}\cos\theta - kl^2\Big(2\cos^2\theta - 1\Big)$$

Avendo fatto uso della relazione

$$-\sin^2\theta = -1 + \cos^2\theta$$

Per le posizioni d'equilibrio E_1 ed E_2 si ha

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\theta^2}(\mathsf{E}_1) = \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\theta^2}(0) = \frac{mgl}{2} - kl^2 > 0 \quad \text{per } (mg/2kl) > 1$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\theta^2}(\mathsf{E}_2) = \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\theta^2}(\pi) = -\frac{mgl}{2} - kl^2 < 0$$

La posizione E_1 è dunque stabile quando non esistono anche le posizioni d'equilibrio E_3 ed E_4, essendo altrimenti instabile, mentre la posizione E_2 è sempre instabile.
Per le posizioni d'equilibrio E_3 ed E_4, poiché $\cos(\theta_3) = \cos(\theta_4)$ si ha

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\theta^2}(\mathsf{E}_3) = \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\theta^2}(\mathsf{E}_4) = \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\theta^2}\Big(\arccos\Big(\frac{mg}{2kl}\Big)\Big)$$
$$= -\frac{m^2 g^2}{4k} + kl^2 > 0 \quad \text{per } (mg/2kl) < 1$$

e quindi, quando esistono, le posizioni d'equilibrio E_3 ed E_4 sono stabili.