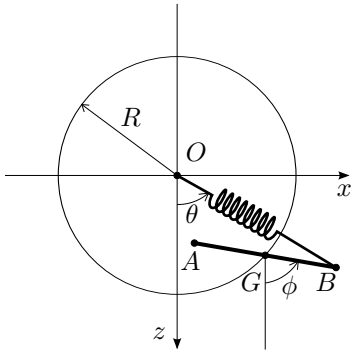
Tutoraggio del 12/11/2012 (compito d'esame del 29/10/2010)

In un piano verticale π, una sbarra omogenea AB di massa m e lunghezza l ha il punto medio G vincolato a scorrere senza attrito lungo una circonferenza fissa del piano. Sia O il suo centro e R il raggio. La sbarra è libera di ruotare attorno ad un asse ortogonale al piano. Tra l'estremo B della sbarra e il punto O agisce una forza elastica di costante $k > 0$.
Assunte come coordinate lagrangiane l'angolo θ che l'asse verticale z passante per O forma con OG e l'angolo ϕ che la verticale forma con AB, si chiede:

1. scrivere le equazioni del moto;

2. determinare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità;

3. determinare le componenti della reazione vincolare nell'istante $\bar{t}$ in cui è $\theta = \phi = \pi/2$ e l'atto di moto è nullo.



Il grado di libertà del sistema è due essendo presente il vincolo olonomo bilatero $x_G^2 + z_G^2 = R^2$. Il vincolo è caratterizzato da $R_t^v = 0$, $\underline{M}_G^v = 0$, essendo $\underline{t}$ la tangente alla circonferenza descritta dal baricentro G della sbarra.
Le equazioni pure di moto si trovano proiettando la prima equazione cardinale sulla tangente alla circonferenza e proiettando la seconda equazione con polo in G sull'asse y ortogonale al piano.

$$mR\ddot{\theta} = -mgsen\theta - k\frac{l}{2}sen(\phi - \theta), \qquad \frac{ml^2}{12}\ddot{\phi} = -k\frac{Rl}{2}sen(\theta - \phi)$$

Le posizioni di equilibrio sono date dalle coppie di valori $(\bar{\theta}, \bar{\phi})$ che annullano i secondi membri delle equazioni pure di moto: dalla seconda equazione si ricava $\theta - \phi = 0,\ \theta - \phi = \pi$. Sostituendo nella prima equazione si ha $\theta = 0, \theta = \pi$. Ne segue che le posizioni di equilibrio sono

$$E_1 = (\theta = 0, \phi = 0),\ E_2 = (\theta = \pi, \phi = \pi)$$

$$E_3 = (\theta = 0, \phi = -\pi),\ E_4 = (\theta = \pi, \phi = 0)$$

Le posizioni di equilibrio si ritrovano anche come punti di stazionarietà dell'energia potenziale

$$V(\theta, \phi) = -mgRcos\theta + k\frac{Rl}{2}cos(\theta - \phi) + cost$$

Per la stabilità applicando i teoremi di Dirichlet-Lagrange e Liapounov si ha: il punto E_1 è un punto sella per V quindi instabile. Il punto E_2 è un punto di massimo per V quindi instabile. Il punto E_3 è un minimo quindi stabile e E_4 è una sella e quindi instabile.
Per determinare la reazione vincolare proiettiamo la prima equazione cardinale

$$m\underline{a}_G = m\underline{g} - kOB + \underline{R}^v$$

sulla normale alla circonferenza (o sugli assi x e z) e si ottiene $\underline{R}^v(\bar{t}) = k(l/2 + R)\underline{i}$