Esercitazione 5

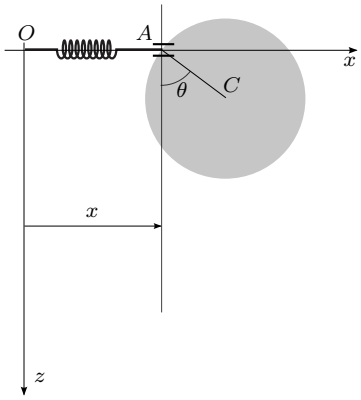
(12.11.2012)

Esercizio 1

In un piano verticale π, un disco omogeneo di massa m e raggio R è vincolato in modo tale che il punto A del suo bordo scorre senza attrito sull'asse x di un riferimento (O, x, z) di π. L'estremo A è soggetto ad una forza elastica $-k\underline{OA}$, con $k > 0$ costante di richiamo. Sia $\underline{j}$ il versore dell'asse y ortogonale a π, θ l'angolo che l'asse verticale z forma con AC (C centro del disco) e x l'ascissa di A. Sul disco agisce inoltre una coppia di momento $\underline{M} = \alpha \sin\theta \cos\theta \underline{j}$, con α una costante positiva. Si chiede di

- *calcolare le posizioni di equilibrio del sistema e determinarne il carattere;*
- *scrivere le equazioni di Lagrange;*
- *riottenere le equazioni pure a partire dalle equazioni cardinali;*
- *calcolare la reazione vincolare nel punto di contatto disco-asse x nell'istante $t = \tau$ in cui è*

$$x(\tau) = R, \quad \theta(\tau) = \pi/2, \qquad \dot{x}(\tau) = 0, \quad \dot{\theta}(\tau) = 0$$



Equilibrio e stabilità

Sul sistema è imposto il vincolo olonomo, fisso e bilatero

$$\underline{OA} = \underline{x}_A = x\underline{i}, \qquad \text{ossia} \qquad z_A = 0$$

pertanto si ha $M = 1$ vincolo olonomo bilatero, da cui si evince che la generica configurazione del sistema è individuata da $n = 3 - M = 2$ parametri (coordinate lagrangiane). Si scelgono in particolare

$$q_1 = x, \qquad q_2 = \theta$$

Essendo il problema piano e il vincolo senza attrito, la reazione vincolare $\underline{\psi}$ in A dev'essere del tipo

$$\underline{\psi} = \psi_z \underline{k} \tag{1}$$

Risulta quindi

$$\cos\theta = \underline{k} \cdot \frac{\underline{AC}}{\|AC\|}$$

Il sistema è altresì conservativo e, in particolare, alla coppia $\underline{M} = \alpha \sin\theta \cos\theta \underline{j}$ corrisponde l'energia potenziale

$$\mathrm{V}_{\underline{M}} = -\int_0^\theta \alpha \sin\hat{\theta} \cos\hat{\theta} \, \mathrm{d}\hat{\theta} = -\frac{\alpha}{2} \sin^2\theta$$

L' energia potenziale del sistema si scrive quindi

$$\mathrm{V}(x,\theta) = \frac{1}{2} k \|OA\|^2 - mgz_C + \mathrm{V}_{\underline{M}}$$

da cui

$$\mathrm{V}(x,\theta) = \frac{1}{2} kx^2 - mgR\cos\theta - \alpha \frac{\sin^2\theta}{2} \tag{2}$$

Risulta infatti

$$\underline{OA} = x\underline{i}$$
$$z_C = R\cos\theta$$

Le posizioni di equilibrio sono soluzione del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} = kx = 0 \\ \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta} = mgR\sin\theta - \alpha\sin\theta\cos\theta = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x = 0 \\ \alpha\sin\theta\Big(\dfrac{mgR}{\alpha} - \cos\theta\Big) = 0 \end{cases}$$

Se $mgR/\alpha > 1$ si hanno due posizioni di equilibrio

$$\mathsf{E}_1 = (0,0), \quad \mathsf{E}_2 = (0,\pi)$$

mentre se $mgR/\alpha < 1$ si hanno quattro posizioni di equilibrio

$$\mathsf{E}_1 = (0,0), \quad \mathsf{E}_2 = (0,\pi), \quad \mathsf{E}_3 = (0,\xi), \quad \mathsf{E}_4 = (0, 2\pi - \xi)$$

Si noti che

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

con $\xi = \arccos(mgR/\alpha)$.
Per valutarne il carattere è necessario calcolare il determinante dei *minori* della matrice Hessiana

$$\mathrm{H}(x,\theta) = \begin{vmatrix} k > 0 & 0 \\ 0 & mgR\cos\theta - \alpha(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{vmatrix}$$

ossia

$$\begin{aligned} \mathrm{H}(x,\theta) &= k\Big[mgR\cos\theta - \alpha(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\Big] \\ &= k\Big[mgR\cos\theta - \alpha(2\cos^2\theta - 1)\Big] \end{aligned}$$

da cui

$$\mathrm{H}(\mathsf{E}_1) = \mathrm{H}(0,0) = k(mgR - \alpha)$$

$$\mathrm{H}(\mathsf{E}_2) = \mathrm{H}(0,\pi) = k(-mgR - \alpha) < 0$$

$$\mathrm{H}(\mathsf{E}_4) = \mathrm{H}(\mathsf{E}_3) = \mathrm{H}(0,\xi) = k\left[\alpha - \frac{(mgR)^2}{\alpha}\right]$$

e quindi E_1 è stabile per $mgR > \alpha$, cioé quando le posizioni $\mathsf{E}_3, \mathsf{E}_4$ non esistono, mentre E_2 è instabile. Le posizioni $\mathsf{E}_3, \mathsf{E}_4$, quando esistono, sono stabili.

Equazioni di Lagrange

Per il **teorema di König**, l'energia cinetica del disco è

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}m\|\underline{v}_C\|^2 + \mathrm{T}^{(rot)}$$

dove $\mathrm{T}^{(rot)}$ è l'energia cinetica del moto (rotatorio) intorno al baricentro C. Nel caso considerato

$$\begin{aligned}\mathrm{T} &= \frac{1}{2}m\|\underline{v}_C\|^2 + \frac{1}{2}I_c\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2R\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + R^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2\end{aligned}$$

Risulta infatti

$$\underline{OC} = (x + R\sin\theta)\underline{i} + (R\cos\theta)\underline{k}$$

e quindi

$$\underline{v}_C = (\dot{x} + R\dot{\theta}\cos\theta)\underline{i} - (R\dot{\theta}\sin\theta)\underline{k}$$

con $I_C = mR^2/2$ momento d'inerzia del disco rispetto ad un asse ortogonale al piano e passante per il baricentro C. In definitiva, l'energia cinetica T vale

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mR\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2 \tag{3}$$

Ricordando le relazioni (2) e (3), la funzione lagrangiana $\mathrm{L} = \mathrm{T} - \mathrm{V}$ del sistema si scrive quindi

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mR\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + mgR\cos\theta + \frac{\alpha}{2}\sin^2\theta$$

da cui le equazioni pure del moto

$$\begin{cases} m\ddot{x} + mR\ddot{\theta}\cos\theta - mR\dot{\theta}^2\sin\theta + kx = 0 \\ mR\ddot{x}\cos\theta + \dfrac{3}{2}mR^2\ddot{\theta} + mgR\sin\theta - \alpha\sin\theta\cos\theta = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Si ricavano le equazioni pure del moto come equazioni di Lagrange di seconda specie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{q}_n}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial q_n} = 0$$

Equazioni pure a partire dalle equazioni cardinali

Ricordando la (1), la prima equazione pura del moto può essere ottenuta proiettando la prima equazione cardinale lungo l'asse x

$$m\underline{a}_C = -k\underline{OA} + m\underline{g} + \underline{\psi} \tag{5}$$

Ricordando infatti che

$$\begin{cases} \underline{OA} = x\underline{i} \\ \underline{OC} = (x + R\sin\theta)\underline{i} + (R\cos\theta)\underline{k} \\ \underline{v}_C = (\dot{x} + R\dot{\theta}\cos\theta)\underline{i} - (R\dot{\theta}\sin\theta)\underline{k} \end{cases}$$

da cui anche

$$\underline{a}_C = (\ddot{x} + R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta)\underline{i} - (R\ddot{\theta}\sin\theta + R\dot{\theta}^2\cos\theta)\underline{k}$$

è immediato verificare che la proiezione lungo l'asse x della (5) fornisce la prima delle (4).
La seconda equazione pura si ottiene scrivendo la seconda equazione cardinale con polo in A

$$\dot{\underline{J}}_A + \underline{v}_A \wedge \underline{Q} = \underline{M} + \underline{AC} \wedge m\underline{g} \tag{6}$$

dove

$$\underline{J}_A = m\underline{AC} \wedge \underline{v}_A + \underline{J}_A^{(rot)}$$

I termini che appaino nella (6) si scrivono

$$\underline{AC} = R\sin\theta\underline{i} + R\cos\theta\underline{k}$$

$$\underline{v}_A = \dot{x}\underline{i}$$

$$m\underline{AC} \wedge \underline{v}_A = m\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ R\sin\theta & 0 & R\cos\theta \\ \dot{x} & 0 & 0 \end{vmatrix} = m\dot{x}R\cos\theta\underline{j}$$

$$\underline{J}_A^{(rot)} = I_A\dot{\theta}\underline{j} = \frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}\underline{j}$$

$$\underline{v}_A \wedge \underline{Q} = m\underline{v}_A \wedge \underline{v}_C = m\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dot{x} & 0 & 0 \\ \dot{x} + R\dot{\theta}\cos\theta & 0 & -R\dot{\theta}\sin\theta \end{vmatrix} = m\dot{x}R\dot{\theta}\sin\theta\underline{j}$$

$$\underline{AC} \wedge m\underline{g} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ R\sin\theta & 0 & R\cos\theta \\ 0 & 0 & mg \end{vmatrix} = -mgR\sin\theta\underline{j}$$

avendo indicato con $I_A = \frac{3}{2}mR^2$ il momento d'inerzia del disco rispetto ad un asse ortogonale al piano e passante per il punto di bordo A. Sostituendo le relazioni precedenti nella (6) è immediato ritrovare la seconda delle (4).

Calcolo della reazione vincolare

Proiettando la (5) sull'asse z si ottiene

$$\psi_z = -mR\ddot{\theta}\sin\theta - mR\dot{\theta}^2\cos\theta - mg$$

Per

$$x(\tau) = R, \quad \theta(\tau) = \pi/2, \qquad \dot{x}(\tau) = 0, \quad \dot{\theta}(\tau) = 0$$

risulta

$$\psi_z(\tau) = -mR\ddot{\theta}(\tau) - mg$$

Sostituendo le condizioni iniziali nelle equazioni pure del moto (4) si ottiene

$$\ddot{x}(\tau) = -\frac{kR}{m}, \qquad \ddot{\theta}(\tau) = -\frac{2}{3}\frac{g}{R}$$

da cui

$$\psi_z(\tau) = -\frac{1}{3}mg$$