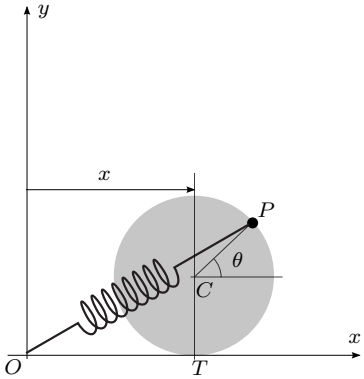
# *Esercitazione 6*

*(19.11.2012)*

## Esercizio 1




*In un piano verticale $\pi$, un disco omogeneo di massa $M$ e raggio $R$ è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse delle $x$ di $\pi$. Un punto materiale $P$ di massa $m$ è vincolato, senza attrito, a muoversi sul bordo del disco ed è attratto dall'origine $O$ del piano $\pi$ da una forza elastica $-k\underline{OP}, k > 0$.*
*Assunte come coordinate lagrangiane l'ascissa $x$ del centro $C$ del disco e l'angolo $\theta$ che l'asse $x$ forma con $\underline{CP}$, si chiede di*

- *calcolare le posizioni di equilibrio del sistema e determinarne il carattere;*
- *scrivere le equazioni di Lagrange;*
- *calcolare la reazione vincolare nel punto di contatto disco-asse $x$ durante il moto nell'istante $t = \tau$ in cui è*

$$x(\tau) = x_0, \quad \theta(\tau) = 3\pi/2, \qquad \dot{x}(\tau) = 0, \quad \dot{\theta}(\tau) = 0$$

### *Equilibrio e stabilità*

Il numero dei gradi di libertà del sistema in assenza di vincoli è 5. Sul sistema sono imposti i vincoli

$$\begin{cases} \|CT\| = \text{cost} = R \\ \underline{v}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{D}} = \underline{0} \\ \|CP\| = \text{cost} = R \end{cases}$$

Il vincolo di puro rotolamento è sulle velocità, quindi anolonomo; tuttavia quando si ha, come in questo caso, una superficie di contatto fissa, il vincolo è integrabile.

essendo $\underline{v}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{D}}$ la velocità del punto $T$ di contatto fra il disco e l'asse $x$. Il vincolo di puro rotolamento $\underline{v}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{D}} = \underline{0}$ fornisce

$$x = -R\theta + cost$$

pertanto, il sistema è soggetto a 3 vincoli olonomi, fissi e bilateri ed ha un numero dei gradi di libertà pari 5-3=2. Come parametri (coordinate lagrangiane), si scelgono in particolare

$$q_1 = x, \qquad q_2 = \theta$$

Sia $\underline{\phi}$ la reazione vincolare al contatto tra disco e punto materiale e $\underline{\psi}$ la reazione vincolare al contatto tra disco e asse $x$. Poiché risulta

$$\mathrm{d}W_{(\underline{\phi},-\underline{\phi})} = \Big(\underline{\phi}\cdot\underline{v}_{\mathrm{P}} - \underline{\phi}\cdot\underline{v}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{D}}\Big)\mathrm{d}t = \Big(\underline{\phi}\cdot\underline{v}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{rel}}\Big)\mathrm{d}t = 0$$

e inoltre

$$\mathrm{d}W_{\underline{\psi}} = \Big(\underline{\psi}\cdot\underline{v}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{D}} + \underline{M}_{\mathrm{T}}(\underline{\psi})\cdot\underline{\omega}\Big)\mathrm{d}t = 0$$

i vincoli sono anche perfetti. Essendo altresì le forze agenti conservative, una configurazione $\underline{\tilde{q}} = (\tilde{x}, \tilde{\theta})$ è quindi di equilibrio se e solo se

$$\left.\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q_k}\right|_{\underline{q}=\underline{\tilde{q}}} = 0, \qquad k = 1, 2$$

mentre le equazioni del moto pure si ottengono dalle equazioni di Lagrange nella forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial q_k} = 0, \qquad k = 1, 2$$

essendo V l'energia potenziale e L la funzione lagrangiana del sistema. L'energia potenziale del sistema si scrive

$$\mathrm{V}(x,\theta) = \frac{1}{2}k\|OP\|^2 + mgy_{\mathrm{P}} + \mathrm{cost}$$

ed essendo

$$\underline{OP} = \underline{x}_{\mathrm{P}} = (x + R\cos\theta)\underline{i} + (R + R\sin\theta)\underline{j} \tag{1}$$

si ha

$$\mathrm{V}(x,\theta) = \frac{1}{2}kx^2 + Rkx\cos\theta + R^2k\sin\theta + mgR\sin\theta + \mathrm{cost} \tag{2}$$

Le posizioni di equilibrio sono quindi soluzione del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} = k(x + R\cos\theta) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta} = -Rkx\sin\theta + R^2k\cos\theta + mgR\cos\theta = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} x = -R\cos\theta, \\ \cos\theta\Big(\sin\theta + 1 + \dfrac{mg}{Rk}\Big) = 0 \end{cases}$$

Poiché

$$\sin\theta + 1 + \frac{mg}{Rk} \neq 0, \quad \forall\theta$$

Se $\underline{t}$ e $\underline{n}$ sono la tangente e la normale al bordo del disco in $P$, poiché $P$ è vincolato a muoversi senza attrito sul bordo del disco stesso, risulta

$$\underline{\phi} = \phi\underline{n}$$

e inoltre

$$\underline{v}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{rel}} = v_{\mathrm{P}}^{\mathrm{rel}}\underline{t}$$

ossia la velocità relativa $\underline{v}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{rel}}$ del punto $P$ rispetto al disco, pari a $\underline{v}_{\mathrm{P}} - \underline{v}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{D}}$, è diretta lungo la direzione tangente. Per il vincolo di puro rotolamento è altresì

$$\underline{v}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{D}} = \underline{0}$$

e

$$\underline{M}_{\mathrm{T}}(\underline{\psi}) = \underline{0}$$

si hanno unicamente le due posizioni di equilibrio

$$\mathsf{E}_1 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \qquad \mathsf{E}_2 = \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Per valutarne il carattere è necessario calcolare il determinante dei *minori* della matrice hessiana

$$\mathrm{H}(x,\theta) := \det H_{\mathrm{V}} = \begin{vmatrix} k > 0 & -kR\sin\theta \\ -kR\sin\theta & -Rkx\cos\theta - R^2k\sin\theta - mgR\sin\theta \end{vmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned} \mathrm{H}(\mathsf{E}_1) &= \mathrm{H}(0,\pi/2) = -2R^2k^2 - mgRk < 0, \\ \mathrm{H}(\mathsf{E}_2) &= \mathrm{H}(0,3\pi/2) = mgRk > 0 \end{aligned}$$

e dunque la posizione di equilibrio $\mathsf{E}_1$ è instabile, la posizione $\mathsf{E}_2$ stabile.

### *Equazioni di Lagrange*

L'energia cinetica del sistema è somma dell'energia cinetica del disco $\mathrm{T_D}$ e dell'energia cinetica del punto materiale $\mathrm{T_P}$. Poiché l'atto di moto del disco è rotatorio attorno al centro istantaneo di rotazione $T$, si ha

$$\mathrm{T} = \mathrm{T_D} + \mathrm{T_P} = \frac{1}{2} I_{\mathrm{T}} \|\underline{\omega}\|^2 + \frac{1}{2} m \|\underline{v}_{\mathrm{P}}\|^2$$

con $\underline{\omega} = \dot\theta \underline{k} = -(\dot x/R)\underline{k}$ velocità angolare del disco e $I_{\mathrm{T}}$ momento d'inerzia del disco rispetto a un asse parallelo al versore $\underline{k}$ e passante per $T$. Per il **teorema di Huyghens** è

$$I_{\mathrm{T}} = I_{\mathrm{C}} + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2$$

con $I_{\mathrm{C}} = MR^2/2$ momento d'inerzia del disco rispetto a un asse parallelo a $\underline{k}$ e passante per il baricentro $C$. Dalla (1) risulta inoltre

$$\underline{v}_{\mathrm{P}} = (\dot x - R\dot\theta\sin\theta)\underline{i} + (R\dot\theta\cos\theta)\underline{j} \tag{3}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathrm{T} &= \frac{3}{4} M\dot x^2 + \frac{1}{2} m\big(\dot x^2 - 2R\dot x\dot\theta\sin\theta + R^2\dot\theta^2\big) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}M + m\right)\dot x^2 - mR\dot x\dot\theta\sin\theta + \frac{1}{2} mR^2\dot\theta^2 \end{aligned}$$

Ricordando la (2) ed omettendo le costanti, la lagrangiana si scrive

$$\begin{aligned} \mathrm{L} = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}M + m\right)\dot x^2 - mR\dot x\dot\theta\sin\theta + \frac{1}{2} mR^2\dot\theta^2 \\ & -\frac{1}{2} kx^2 - Rkx\cos\theta - R^2k\sin\theta - mgR\sin\theta \end{aligned}$$

da cui le equazioni pure del moto

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{2}M + m\right)\ddot{x} - mR\ddot{\theta}\sin\theta - mR\dot{\theta}^2\cos\theta + k(x + R\cos\theta) = 0 \\ mR^2\ddot{\theta} - mR\ddot{x}\sin\theta - Rkx\sin\theta + R^2k\cos\theta + mgR\cos\theta = 0 \end{cases} \tag{4}$$

### *Calcolo della reazione vincolare*

La reazione vincolare $\underline{\psi}$ al contatto tra disco e asse $x$ ha direzione incognita. Le componenti $\psi_x, \psi_y$ del vettore $\underline{\psi}$ nella base $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ possono essere ottenute proiettando sull' asse $x$ e $y$ rispettivamente la prima equazione cardinale del sistema (in modo tale che la reazione al contatto tra punto materiale e disco non appaia)

$$M\underline{a}_{\mathrm{C}} + m\underline{a}_{\mathrm{P}} = -k\underline{OP} + (M + m)\underline{g} + \underline{\psi}$$

Ricordando la (1) si ottiene

$$\begin{aligned} \psi_x &= (M + m)\ddot{x} - mR\ddot{\theta}\sin\theta - mR\dot{\theta}^2\cos\theta + k(x + R\cos\theta) \\ \psi_y &= mR\ddot{\theta}\cos\theta - mR\dot{\theta}^2\sin\theta + k(R + R\sin\theta) + (M + m)g \end{aligned}$$

Si ha infatti

$$\underline{a}_{\mathrm{C}} = \ddot{x}\underline{i}$$

nonché, derivando la (3) rispetto al tempo

$$\begin{aligned} \underline{a}_{\mathrm{P}} = {} & (\ddot{x} - R\ddot{\theta}\sin\theta - R\dot{\theta}^2\cos\theta)\underline{i} \\ & + (R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta)\underline{k} \end{aligned}$$

da cui, sostituendo i valori di posizione ed atto di moto per $t = \tau$

$$x(\tau) = x_0, \quad \theta(\tau) = 3\pi/2, \qquad \dot{x}(\tau) = 0, \quad \dot{\theta}(\tau) = 0 \tag{5}$$

si ha

$$\begin{aligned} \psi_x(\tau) &= (M + m)\ddot{x}(\tau) + mR\ddot{\theta}(\tau) + kx_0 \\ \psi_y(\tau) &= (M + m)g \end{aligned}$$

L' accelerazione nell' istante considerato si ottiene sostituendo le (5) nelle equazioni del moto (4)

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{2}M + m\right)\ddot{x}(\tau) + mR\ddot{\theta}(\tau) + kx_0 = 0 \\ mR^2\ddot{\theta}(\tau) + mR\ddot{x}(\tau) + Rkx_0 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\ddot{x}(\tau) = 0, \qquad \ddot{\theta}(\tau) = -\frac{k}{mR}x_0 \tag{6}$$

Sostituendo le (6) nelle espressioni di $\psi_x(\tau)$ e $\psi_y(\tau)$ risulta

$$\psi_x(\tau) = 0, \qquad \psi_y(\tau) = (M + m)g$$