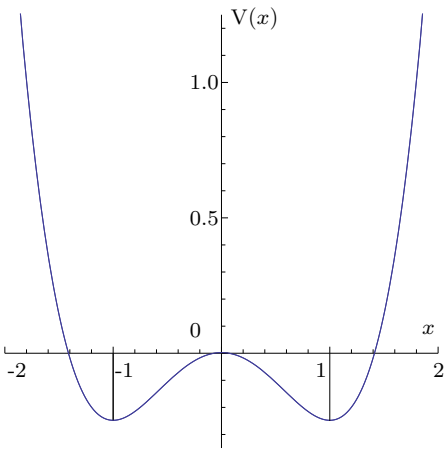
Esercitazione 7

(26.11.2012)

Esercizio 1

Discutere qualitativamente il moto e tracciare il diagramma di fase nel caso in cui l'energia potenziale sia esprimibile in termini adimensionali nella forma

$$\mathrm{V}(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$



Si ha

$$\frac{\mathrm{dV}(x)}{\mathrm{d}x} = x^3 - x, \qquad \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{V}(x)}{\mathrm{d}x^2} = 3x^2 - 1$$

Le posizioni d'equilibrio si ottengono imponendo

$$\frac{\mathrm{dV}(x)}{\mathrm{d}x} = x^3 - x = 0$$

e sono

$$\mathsf{E}_1 = (x = 0), \qquad \mathsf{E}_2 = (x = 1), \qquad \mathsf{E}_3 = (x = -1)$$

Poiché

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{V}(x)}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{\mathsf{E}_1} < 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{V}(x)}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{\mathsf{E}_2} > 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{V}(x)}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{\mathsf{E}_3} > 0,$$

la posizione E_1 è instabile, le posizioni $\mathsf{E}_2, \mathsf{E}_3$ sono stabili. Inoltre

$$\mathrm{V}(0) = \mathrm{V}_{\max} = 0, \qquad \mathrm{V}(-1) = \mathrm{V}(1) = \mathrm{V}_{\min} = -\frac{1}{4}$$

Distinguiamo quattro valori dell'energia iniziale

1. $\mathrm{E}_1 = \mathrm{V}_{\min}$. L'insieme $\{x : \mathrm{V}(x) \leq \mathrm{E}_1\}$ contiene i due soli punti di equilibrio $\mathsf{E}_2, \mathsf{E}_3$. Poiché in corrispondenza di tali punti è $\mathrm{V}(x) = \mathrm{E}_1$ risulta $\dot{x}(0) = 0$ e la soluzione è la quiete;

2. $\mathrm{V}_{\min} < \mathrm{E}_2 < \mathrm{V}_{\max}$. Moto sempre oscillatorio che avviene a destra o a sinistra dell'origine (dipende dalla posizione iniziale).

3. $\mathrm{E}_3 = \mathrm{V}_{\max}$. La curva di livello E_3 contiene tre orbite
   (a) il punto di equilibrio E_1. La soluzione è la quiete;
   (b) due orbite omocline cioè tali che $x(t) \to 0$ per $t \to \pm\infty$, se $x_0 \in [-\sqrt{2}, 0)$ o $x_0 \in (0, \sqrt{2}]$. Risulta infatti $\mathrm{d}V/\,\mathrm{d}x|_{x=0} = 0$;
4. $\mathrm{E}_4 > \mathrm{V}_{\max}$. Moto sempre oscillatorio.

Le orbite ottenute nel piano delle fasi sono sintetizzate in figura 1.

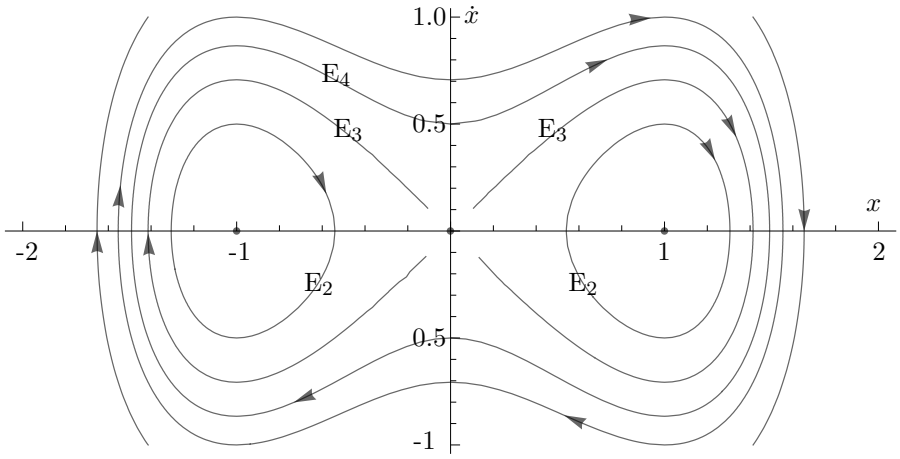


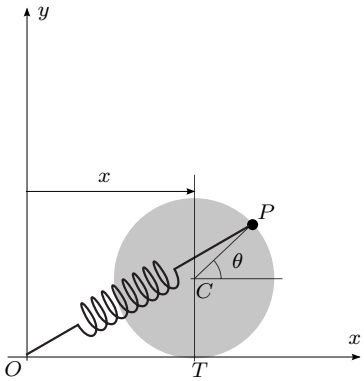
Figura 1: diagramma di fase per massa unitaria.

Esercizio 2

Studiare le piccole oscillazioni intorno alla posizione d'equilibrio stabile

$$\mathsf{E}_2 = (0, 3\pi/2)$$

del sistema studiato nell'esercizio 1 dell'esercitazione 6 (19.11.2012). Si assuma la massa M del disco pari a due volte la massa m del punto. La lagrangiana si scrive



$$\begin{aligned} \mathrm{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{2}M + m\right)\dot{x}^2 - 2mR\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + mR^2\dot{\theta}^2\right] \\ -\frac{1}{2}kx^2 - Rkx\cos\theta - R^2k\sin\theta - mgR\sin\theta \end{aligned}$$

Si vogliono studiare le piccole oscillazioni, ovvero moti per i quali sia gli incrementi delle coordinate lagrangiane

$$\eta_1 = x - x_{\mathsf{E}_2} = x, \qquad \eta_2 = \theta - \theta_{\mathsf{E}_2} = \theta - \frac{3}{2}\pi$$

sia le velocità lagrangiane $\dot{x} = \dot{\eta}_1, \dot{\theta} = \dot{\eta}_2$ si mantengono infinitesimali. La lagrangiana dei piccoli moti (o lagrangiana ridotta) si scrive

$$\tilde{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{n} T_{hk}\dot{\eta}_h\dot{\eta}_k - \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{n} V_{hk}\eta_h\eta_k \tag{1}$$

con T_{hk} la matrice di energia cinetica e V_{hk} la matrice hessiana. Alla precedente corrispondono le seguenti equazioni di Lagrange

$$\sum_{k=1}^{n} T_{hk}\ddot{\eta}_k + V_{hk}\eta_k = 0, \qquad h = 1, \ldots, n \tag{2}$$

La matrice T_{hk} si ottiene direttamente dall'espressione dell'energia cinetica come

$$T_{hk} = \begin{bmatrix} 3/2M + m & -mR\sin\theta \\ -mR\sin\theta & mR^2 \end{bmatrix}$$

che in $\mathsf{E}_2 = (0, 3\pi/2)$ fornisce

$$T_{hk} = \begin{bmatrix} 4m & mR \\ mR & mR^2 \end{bmatrix}$$

avendo fatto uso della posizione $M = 2m$.
Per la matrice hessiana si è già ottenuto

$$V_{hk} = \begin{bmatrix} k & -kR\sin\theta \\ -kR\sin\theta & -Rkx\cos\theta - R^2k\sin\theta - mgR\sin\theta \end{bmatrix}$$

che in $\mathsf{E}_2 = (0, 3\pi/2)$ fornisce

$$V_{hk} = \begin{bmatrix} k & kR \\ kR & R^2k + mgR \end{bmatrix}$$

Si ottiene pertanto la seguente lagrangiana dei piccoli moti (1)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{L}} =& \frac{1}{2}\Big(4m\dot{\eta}_1^2 + 2mR\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2 + mR^2\dot{\eta}_2^2\Big) \\ &-\frac{1}{2}\Big(k\eta_1^2 + 2kR\eta_1\eta_2 + (R^2k + mgR)\eta_2^2\Big) \end{aligned}$$

oltre che le equazioni di lagrange (2)

$$\begin{bmatrix} 4m & mR \\ mR & mR^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & kR \\ kR & R^2k + mgR \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ovvero, in forma scalare

$$\begin{cases} 4m\ddot{\eta}_1 + mR\ddot{\eta}_2 + k\eta_1 + kR\eta_2 = 0 \\ mR\ddot{\eta}_1 + mR^2\ddot{\eta}_2 + kR\eta_1 + (R^2k + mgR)\eta_2 = 0 \end{cases}$$

Il sistema lineare ammette soluzioni non banali se e solo se

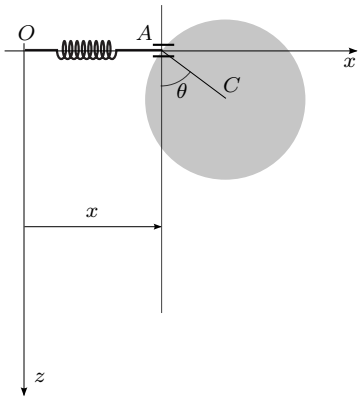
$$\det\left(V_{hk} - \lambda T_{hk}\right) = 0$$

Poiché le matrici T_{hk} e V_{hk} sono simmetriche e definite positive, gli autovalori λ sono reali e positivi.

da cui

$$\lambda_{1,2} = \frac{4mg + 3kR \pm \sqrt{(4mg + 3kR)^2 - 12mRkg}}{6mR} > 0$$

Esercizio 3



Assunto $\alpha = mgR/2$, studiare le piccole oscillazioni intorno alla posizione d'equilibrio stabile

$$\mathsf{E}_1 = (0,0)$$

del sistema studiato nell'esercizio 1 dell'esercitazione 5 (12.11.2012). Si assuma $mg = 3kR$.
La lagrangiana si scrive

$$\begin{aligned} \mathrm{L} = \frac{1}{2}\Big(m\dot{x}^2 + \frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + 2mR\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\Big) \\ -\frac{1}{2}kx^2 + mgR\cos\theta + \frac{\alpha}{2}\sin^2\theta \end{aligned}$$

Per studiare le piccole oscillazioni, ovvero i moti per i quali sia gli incrementi delle coordinate lagrangiane

$$\eta_1 = x - x_{\mathsf{E}_1} = x, \qquad \eta_2 = \theta - \theta_{\mathsf{E}_1} = \theta$$

sia le velocità lagrangiane $\dot{x} = \dot{\eta}_1, \dot{\theta} = \dot{\eta}_2$ si mantengono infinitesimali, si applicano le relazioni (1) e (2) già viste.
La matrice T_{hk} si ottiene direttamente dall'espressione dell'energia cinetica come

$$T_{hk} = \begin{bmatrix} m & mR\cos\theta \\ mR\cos\theta & (3/2)mR^2 \end{bmatrix}$$

che in $\mathsf{E}_1 = (0,0)$ fornisce

$$T_{hk} = \begin{bmatrix} m & mR \\ mR & (3/2)mR^2 \end{bmatrix}$$

Per la matrice hessiana si è già ottenuto

$$V_{hk} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mgR\cos\theta - \alpha(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{bmatrix}$$

che in $\mathsf{E}_1 = (0,0)$ fornisce

$$V_{hk} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mgR/2 \end{bmatrix}$$

avendo fatto uso della posizione $\alpha = mgR/2$.
Si ottiene pertanto la seguente lagrangiana dei piccoli moti (1)

$$\tilde{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\Big(m\dot{\eta}_1^2 + 2mR\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2 + \frac{3}{2}mR^2\dot{\eta}_2^2\Big) - \frac{1}{2}\Big(k\eta_1^2 + \frac{1}{2}mgR\eta_2^2\Big)$$

oltre che le equazioni di lagrange (2)

$$\begin{bmatrix} m & mR \\ mR & (3/2)mR^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mgR/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ovvero, in forma scalare

$$\begin{cases} m\ddot{\eta}_1 + mR\ddot{\eta}_2 + k\eta_1 = 0 \\ mR\ddot{\eta}_1 + \dfrac{3}{2}mR^2\ddot{\eta}_2 + \dfrac{mgR}{2}\eta_2 = 0 \end{cases}$$

Il sistema lineare ammette soluzioni non banali se e solo se

$$\det\left(V_{hk} - \lambda T_{hk}\right) = 0$$

Poiché le matrici T_{hk} e V_{hk} sono simmetriche e definite positive, gli autovalori λ sono reali e positivi.

da cui, facendo uso della $mg = 3kR$, si ha

$$\lambda_{1,2} = (3 \pm \sqrt{6})\frac{k}{m} > 0$$