Tutoraggio del 22/10/2012

In un piano verticale π, due punti P_1 e P_2 di ugual massa m sono vincolati senza attrito nel modo seguente: P_1 e' vincolato a scorrere sull'asse x di un riferimento cartesiano Oxz nel piano e P_2 e' vincolato a mantenersi a distanza costante l da O. Tra i due punti si esercita una forza elastica ideale di costante $k > 0$.

Assunti come parametri lagrangiani la coordinata x del punto P_1 e l'angolo θ che l'asse verticale (orientato positivamente verso il basso) forma con OP_2, si chiede

1) Verificare che il sistema e' soggetto a vincoli olonomi bilateri ed ha 2 gradi di liberta'.
2) Scrivere le equazioni del moto e calcolare le reazioni vincolari.
3) Calcolare le posizioni di equlibrio e discuterne la stabilita'.

Poiche' la forza interna e' nota conviene usare le equazioni di Newton per i due punti piuttosto che le equazione cardinali.

$$m\underline{a}_1 = m\underline{g} - kP_2P_1 + \underline{r}_1, \quad m\underline{a}_2 = m\underline{g} - kP_1P_2 + \underline{r}_2 \qquad (1)$$

e proiettare la prima equazione sull'asse Ox e la seconda sulla tangente all'orbita descritta da P_2. In questo modo otteniamo le due equazioni pure di moto. Tenendo conto che il versore tangente e il versore normale all'orbita di P_2 e il vettore P_2P_1 sono dati da

$$\underline{t} = cos\theta\underline{i} - sen\theta\underline{k}, \quad \underline{n} = -sen\theta\underline{i} - cos\theta\underline{k}, \quad P_2P_1 = P_2O + OP_1 = OP_1 - OP_2 = x\underline{i} - l(sen\theta\underline{i} + cos\theta\underline{k}),$$

le equazioni di moto sono

$$m\ddot{x} = -k(x - lsen\theta), \quad ml\ddot{\theta} = kxcos\theta - mgsen\theta \qquad (2)$$

Le reazioni vincolari si ottengono proiettando le equazioni (1) sull'asse z e sulla normale all'orbita di P_2 rispettivamente

$$\underline{r}_1 = -(mg + klcos\theta)\underline{k}, \quad \underline{r}_2 = (ml\dot{\theta}^2 + mgcos\theta + k(xsen\theta - l))\underline{n}$$

Le posizioni di equilibrio si ottengono annullando i secondi membri delle equazioni (2) e sono date da

$$E_1 = (x = 0, \theta = 0), \; E_2 = (x = 0, \theta = \pi)$$

e se $\frac{mg}{kl} < 1$,

$$E_3 = (x = l\sqrt{1 - (\frac{mg}{kl})^2}, \; \theta = arcos\frac{mg}{kl}) \;\; E_4 = (x = -l\sqrt{1 - (\frac{mg}{kl})^2}, \; \theta = 2\pi - arcos\frac{mg}{kl})$$

Notiamo che il sistema e' sostanzialmente conservativo e l'energia potenziale e' data da

$$V = \frac{1}{2}k||P_1P_2||^2 - mgz_2 = \frac{1}{2}k(x^2 - 2xlsen\theta) - mglcos\theta + c$$

e ritroviamo le posizioni di equilibrio come punti di stazionarieta' di V. Questo fatto e' generale e sara' dimostrato nelle lezioni successive.
Per studiare il carattere delle posizioni di equilibrio applichiamo i teoremi di Dirichlet-Lagrange e Liapunov. Risulta che E_1 e' stabile se non esistono E_3, E_4 cioe' se $\frac{mg}{kl} > 1$, altrimenti e' instabile. E_2 e' sempre instabile e E_3, E_4 sono stabili quando esistono.