NOME.....COGNOME.....Anno di Corso.....

Fisica Matematica, Appello del 12/09/2016, A.A. 2015/2016 CIVILI

Esercizio 1. In un piano verticale $\pi = (O, x, y)$ un' asta omogenea AB di massa m e lunghezza l ha il baricentro G vincolato a scorrere senza attrito sull'asse Ox del piano. Sull'estremo A agisce una forza elastica $-kOA$, e sull'estremo B una forza elastica $-kB^*B$, essendo B^* la proiezione di B sull'asse Ox e $k > 0$.
Assunte come coordinate lagrangiane l'ascissa x di G e l'angolo θ che l'asse orizzontale forma con AB, si chiede

1) Calcolare le posizioni di equilibrio e studiarne il carattere

2) Scrivere le equazioni dei piccoli moti attorno ad una posizione di equilibrio stabile e determinare le pulsazioni proprie.

3) Scrivere le equazioni cardinali che danno luogo a equazioni pure di moto.

SOLUZIONE:

L'energia potenziale e' data da

$$V(x,\theta) = \frac{1}{2}k(x^2 - xlcos\theta) + \frac{1}{2}k(\frac{l^2}{4}sen^2\theta)$$

e le posizioni di equilibrio sono le seguenti

$$P_1 = (x = l/2, \theta = 0), \quad P_2 = (x = -l/2, \theta = \pi), P_3 = (x = 0, \theta = \pi/2), P_4 = (x = 0, \theta = 3/2\pi)$$

P_1 e P_2 sono stabili, P_3 e P_4 sono instabili.

L'energia cinetica e' data da

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2$$

e la lagrangiana delle piccole oscillazioni attorno a P_1 e' data da

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + \frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}(k(x - l/2)^2 + k\frac{l^2}{2}\theta^2)$$

da cui si ricavano le equazioni dei piccoli moti

$$m\ddot{x} + k(x - l/2) = 0, \qquad \frac{1}{12}ml^2\ddot{\theta} + k\frac{l^2}{2}\theta = 0$$

$\lambda_1 = \frac{k}{m}$ e $\lambda_2 = \frac{6k}{m}$

Le equazioni pure di moto si ricavano proiettando la prima equazione cardinale sull'asse Ox

$$m\underline{a}_G = m\underline{g} - kOA - kB^*B + \underline{R}^v$$

e la seconda equazione cardinale con polo in G proiettata suul'asse Oz

$$\dot{\underline{J}}_G^{rot} = GB \wedge (-kB^*B) + GA \wedge (-kOA) + \underline{M}_G^v$$