NOME.....COGNOME.....Anno di Corso.....

Fisica Matematica, Appello del 10/02/2016, A.A. 2015/2016 CIVILI

Esercizio 1. In un piano verticale π, una sbarra omogenea AB di massa M e lunghezza l e' vincolata a ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano π passante per il suo baricentro che si assume essere l' origine di un sistema di assi cartesiani (O, x, y) nel piano. Un punto P di massa m e' vincolato a muoversi su una retta del piano sovrapposta alla sbarra AB. I vincoli sono lisci.
Su punto agisce una forza elastica $-kOP$, $k > 0$ e sulla sbarra una forza elastica $-kB^*B$ essendo B^* la proiezione di B sull'asse verticale. Sia θ l'angolo che l'asse orizzontale forma la sbarra AB e s l'ascissa di P lungo la sbarra, $||OP|| = s$

Si chiede:

1) Calcolare le posizioni di equilibrio del sistema e determinarne il carattere.
2) Scrivere le equazioni di Lagrange del moto e dire come ritrovarle attraverso le equazioni cardinali
3) Calcolare le reazioni vincolari nell'istante in cui e' $s = l/2, \theta = \pi/2$ e l'atto di moto e' nullo.

1. Si risponda ai punti precedenti spiegando, in modo conciso, il ragionamento seguito e i teoremi applicati, verificando che le ipotesi di tali teoremi sono soddisfatte per il sistema in esame.
2. **Si ricorda di portare alla prova orale le ricevute attestanti il superamento degli esami propedeutici.**

$$V(s,\theta) = mgssen\theta + \frac{1}{2}ks^2 + \frac{1}{2}\frac{kl^2}{4}cos^2\theta$$

I punti di stazionarieta' dell'energia potenziale sono dati da

$$E_1 = (s = 0, \theta = 0),\ E_2 = (s = 0, \theta = \pi),\ E_3 = (s = -\frac{mg}{k}, \theta = \pi/2),\ E_4 = (s = \frac{mg}{k}, \theta = 3\pi/2)$$

E_1 e E_2 sono instabili, E_3, e E_4 sono stabili.

La Lagrangiana del sistema e' data da

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{s}^2 + s^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\frac{Ml^2}{12}\dot{\theta}^2 - V(s,\theta)$$

e le equazioni di lagrange del moto sono

$$m(\ddot{s} - s\dot{\theta}^2) + ks + mgsen\theta = 0, \qquad \frac{Ml^2}{12}\ddot{\theta} + 2ms\dot{s}\dot{\theta} + ms^2\ddot{\theta} + mgscos\theta - \frac{kl^2}{4}cos\theta sen\theta = 0$$

La prima equazione e' l'equazione di Newton per il punto proiettata sulla retta coincidente con la sbarra e la seconda equazione coincide con la seconda equazione cardinale per l'intero sistema con polo in O proiettata sull'asse Oz.

La prima equazione cardinale per l'intero sistema fornisce le componenti della reazione vincolare esterna agente sulla sbarra e l'equazione di Newton per il punto proiettata sulla normale alla sbarra fornisce la reazione interna agente tra punto e sbarra. Nell'istante considerato

$$\ddot{s}(\bar{t}) = -\frac{kl}{2m} - g, \quad \ddot{\theta}(\bar{t}) = 0, \qquad R_x^v = 0, \quad R_y^v = -\frac{kl}{2} + Mg, \quad \Phi = 0$$