Fisica Matematica , Appello del 2/07/2015, A.A. 2014/15 CIVILI

Esercizio 1. Dato il sistema dinamico

$$\dot{x} = x(k^2 - x^2 - y^2) + y(x^2 + y^2 + k^2), \qquad \dot{y} = -x(k^2 + x^2 + y^2) + y(k^2 - x^2 - y^2),$$

Studiare la stabilita' della posizione di equilibrio $(0,0)$ per $k \neq 0$ e per $k = 0$

Esercizio 2. Determinarne l'esistenza di un ciclo limite, il suo carattere e il periodo per il seguente sistema

$$\dot{x} = x(x^2 + y^2 - \beta) - 4y(x^2 + y^2 + 1), \qquad \dot{y} = y(x^2 + y^2 - \beta) + 4x(x^2 + y^2 + 1), \quad \beta \in R$$

Soluzione:

1. La traccia e il determinante dello Jacobiano calcolato in $(0,0)$ sono dati da $TrA = 2k^2$, $DetA = 2k^4$. Ne segue che per $k \neq 0$ il punto di equilibrio e' instabile.
Per $k = 0$ si applica il 2 metodo di Liapunov prendendo come funzione di Liapunov $W(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Tale funzione e' nulla nel punto di equilibrio, e' definita positiva e la sua derivata calcolata lungo le soluzioni $\dot{W} = -(x^2 + y^2)^2 < 0$. L'origine di R^2 e' asintoticamente stabile.

2. La traccia e il determinante dello Jacobiano calcolato in $(0,0)$ sono dati da $TrA = -2\beta$, $DetA = \beta^2 + 16$. e $\lambda_{1,2} = -\beta \pm 4i$. Ne segue che per $\beta > 0$ il punto di equilibrio e' asintoticamente stabile, per $\beta < 0$ e' instabile e per $\beta = 0$ si applica il 2 metodo prendendo come funzione di Liapunov $W(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ la cui derivata calcolata lungo le soluzioni e' $\dot{W} = (x^2 + y^2)^2 > 0$. L'origine di R^2 e' instabile.

Passando a coordinate polari si ha

$$\dot{\rho} = \rho(\rho^2 - \beta), \quad \dot{\theta} = 4(\rho^2 + 1)$$

Il ciclo limite che si ha per $\beta > 0$ e' instabile poiche' ρ cresce al di fuori del ciclo e descresce all'interno. (per $\beta > 0$ l'origine di R^2 e' asint. stabile!!). E' percorso in verso antiorario e il periodo e' dato da $T = \frac{2\pi}{4(\beta+1)}$