Esercizio 2. Dato il sistema dinamico

$$\dot{x} = \alpha x - 2y - x(x^2 + y^2), \qquad \dot{y} = 2x + \alpha y - y(x^2 + y^2), \quad \alpha \in R$$

1. Studiare, al variare di α, la stabilita' della posizione di equilibrio $(0, 0)$
2. Determinarne l'esistenza di un ciclo limite e la biforcazione alla Hopf.

Il primo metodo di Liapunov ci assicura l'asintotica stabilita' della posizione di equilibrio $(0, 0)$ nel caso $\alpha < 0$, l'instabilita' nel caso $\alpha > 0$ ($TrA = 2\alpha,\ detA = \alpha^2 + 4$) e non ci dice nulla quando $\alpha = 0$. In quest'ultimo caso si prende come funzione di Liapunov $W(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ e si osserva che e' definita positiva, e' nulla in $(0, 0)$ e la sua derivata di Lie e'

$$\dot{W} = -(x^2 + y^2)^2 < 0$$

che prova l'asintotica stabilita' dell'origine anche nel caso $\alpha = 0$.
Passando a coordinate polari, il sistema si scrive come

$$\dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2), \qquad \dot{\theta} = 2$$

Si osserva che $\dot{\rho} > 0$ se $\rho^2 < \alpha$ con $\alpha > 0$, e che $\dot{\rho} < 0$ se $\rho^2 > \alpha$ con $\alpha > 0$: se $\alpha > 0$, esiste un ciclo limite attrattivo che e' una circonferenza di raggio $\rho = \sqrt{\alpha}$ percorsa con periodo $T = \pi$ in senso antiorario e si ha una biforcazione alla Hopf per $\alpha = 0$.