Fisica Matematica, Appello del 4/07/2017, A.A. 2016/2017 CIVILI

Esercizio 1. In un piano verticale π, un disco omogeneo di massa M e raggio R e' vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse orizzontale Ox di π. Un punto P di massa m e' vincolato senza attrito a scorrere lungo il bordo del disco. Il punto e' soggetto ad una forza elastica $-kOP$, $k > 0$, essendo O l'origine di π. Assunte come coordinate lagrangiane l'ascissa x del centro C del disco e l'angolo θ che l'asse orizzontale forma con CP, si chiede:

1) Calcolare le posizioni di equilibrio del sistema e determinarne il carattere.
2) Scrivere la lagrangiana delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile e le equazioni dei piccoli moti.
3) Calcolare la reazione vincolare agente sul disco nel punto di contatto con l'asse Ox nel generico istante

Soluzione:

1. L'energia potenziale del sistema e' data da

$$V(x,\theta) = \frac{1}{2}k(x^2 + 2xRcos\theta + 2R^2 sen\theta) + mgRsen\theta + c$$

e le posizioni di equilibrio sono: $E_1(x = 0, \theta = \frac{\pi}{2})$, $E_2(x = 0, \theta = \frac{3\pi}{2})$. E_1 e' instabile e E_2 stabile.
La Lagrangiana del sistema si scrive

$$L = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2 - 2R\dot{x}\dot{\theta}sen\theta) - V(x,\theta)$$

tenendo conto che la velocita' angolare del disco e' $\underline{\omega} = -\frac{\dot{x}}{R}\underline{k}$ a causa del vincolo di puro rotolamento.
La Lagrangiana delle piccole oscillazioni attorno a E_2 e' data da

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}((\frac{3}{2}M + m)\dot{\eta}_1^2 + mR^2\dot{\eta}_2^2 + 2mR\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2) - \frac{1}{2}(k\eta_1^2 + (kR^2 + mgR)\eta_2^2 + 2kR\eta_1\eta_2)$$

dove $\eta_1 = x, \eta_2 = \theta - \frac{3\pi}{2}$.

$$(\frac{3}{2}M + m)\ddot{\eta}_1 + mR\ddot{\eta}_2 + k\eta_1 + kR\eta_2 = 0, \quad mR^2\ddot{\eta}_2 + mR\ddot{\eta}_1 + (kR^2 + mgR)\eta_2 + kR\eta_1 = 0$$

sono le equazioni dei piccoli moti.
Per calcolare le componenti della reazione vincolare agente sul disco nel suo punto di contatto con l'asse Ox, si scrive la 1 equazione cardinale per l'intero sistema:

$$m\underline{a}_P + M\underline{a}_C = (m + M)\underline{g} - kOP + \underline{\phi}_T$$

essendo T il punto di contatto disco-asse Ox. Proiettata sugli assi del piano tale equazione fornisce le due componenti della reazione $\underline{\phi}_T$.