NOME.....COGNOME.....Anno di Corso.....

Fisica Matematica, Appello del 5/06/2017, A.A. 2016/2017 CIVILI

Esercizio In un piano verticale $\pi = (O, x, y)$ un' asta omogenea AB di massa M e lunghezza l ha un suo punto O posto a distanza pari a $\frac{l}{3}$ dall'estremo A vincolato senza attrito a rimanere fisso. Un punto materiale P di massa m e' vincolato senza attito a scorrere sull'asse Ox del piano. Tra estremo A dell'asta e il punto P agisce una forza elastica di costante $k > 0$.
Assunte come coordinate lagrangiane l'ascissa x di P e l'angolo θ che l'asse orizzontale forma con AB, si chiede

1) Calcolare le posizioni di equilibrio e studiarne il carattere

2) Scrivere la lagrangiana e le equazioni dei piccoli moti attorno alla posizione di equilibrio che e' stabile per $Mg = 3kl$

3) Calcolare le reazioni vincolari agenti sull'asta e sul punto nella precedente posizione di equilibrio

SOLUZIONE:

L'energia potenziale e' data da

$$V(x,\theta) = \frac{1}{2}k(x^2 - \frac{4}{3}lxcos\theta) + Mg\frac{l}{6}sen\theta$$

e le posizioni di equilibrio sono le seguenti

$$P_1 = (x = 0, \theta = \pi/2), \quad P_2 = (x = 0, \theta = 3/2\pi), \quad P_3 = (x = +\frac{2}{3}l\sqrt{1-\lambda^2}, \theta = arcsen(-\lambda)), \quad P_4 = (x = -x_3, \theta = \pi - \theta_3)$$

Queste ultime due posizioni di equilibrio esistono se $\lambda = \frac{3Mg}{8kl} < 1$
P_1 e' instabile, P_2 e' stabile se $\frac{3Mg}{8kl} > 1$, cioe' se non esistono P_3 e P_4 e P_3 e P_4 sono stabili quando esistono.

L'energia cinetica e' data da

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{Ml^2}{9}\dot{\theta}^2$$

e la lagrangiana delle piccole oscillazioni attorno a P_2 che e' stabile per $Mg = 3kl$ e' data da

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}(m\dot{\eta}_1^2 + \frac{ml^2}{9}\dot{\eta}_2^2) - \frac{1}{2}(k\eta_1^2 + \frac{kl^2}{2}\eta_2^2 - \frac{4}{3}kl\eta_1\eta_2)$$

da cui si ricavano le equazioni dei piccoli moti

$$m\ddot{\eta}_1 + k\eta_1 - \frac{2}{3}kl\eta_2 = 0, \qquad \frac{1}{9}Ml^2\ddot{\eta}_2 + \frac{kl^2}{2}\eta_2 - \frac{2}{3}kl\eta_1 = 0$$

Dalla 1 equazione cardinale per la sola asta e dall'equazione di Newton per il punto P si ricavano le reazioni vincolari calcolate nella precedente posizione di equilibrio

$$R_x^v = 0, \quad R_y^v = Mg - \frac{2}{3}kl, \quad \Phi = mg + \frac{2}{3}kl$$