NOME.....COGNOME.....Anno di Corso.....

Fisica Matematica, Appello del 05/07/2016, A.A. 2015/2016 CIVILI

Esercizio 1. In un piano orizzontale π, una sbarra omogenea AB di massa m e lunghezza l ha l'estremo A vincolato, mediante carrello, a scorrere senza attrito sull'asse x di π. Sul baricentro agisce una forza elastica $-kOP$ di costante $k > 0$, essendo O l'origine degli assi nel piano. Sull' estremo B della sbarra agisce una forza costante $\underline{F} = f\underline{i}$ dove $\underline{i}$ e' il versore dell'asse Ox e $f > 0$.
Assunte come coordinate lagrangiane l'ascissa x di A e l'angolo θ che l'asse Ox forma con AB, si chiede:

1) Calcolare le posizioni di equilibrio del sistema e determinarne il carattere.
2) Scrivere la Lagrangiana dei piccoli moti attorno ad una posizione di equilibrio stabile, le equazioni dei piccoli moti e calcolare le frequenze.

1. Si risponda ai punti precedenti spiegando, in modo conciso, il ragionamento seguito e i teoremi applicati, verificando che le ipotesi di tali teoremi sono soddisfatte per il sistema in esame.

SOLUZIONE

1. Il sistema e' sostanzialmente conservativo e l'energia potenziale della forza $\underline{F}$ e' data da

$$-dV_F = dL_F = f\underline{i} \cdot \underline{v}_B dt = f dx_B, \qquad V_F = -f(x + l\cos\theta)$$

. L'energia potenziale del sistema e' data da

$$V(x,\theta) = \frac{1}{2}k(x^2 + lxcos\theta) - f(x + l\cos\theta)$$

e le posizioni di equilibrio sono

$$E_1(x = -\frac{l}{2} + \frac{f}{k}, \theta = 0),\ E_2(x = \frac{l}{2} + \frac{f}{k}, \theta = \pi),\ E_3(x = \frac{2f}{k}, \theta = arcos(-\frac{2f}{kl}),\ E_4(x = x_3, \theta = 2\pi - \theta_3)$$

$E_3,\ E_4$ esistono solo se $\frac{\lambda=2f}{kl} < 1$.
E_1 e' stabile $\forall\lambda$, E_2 e' stabile se $\lambda < 1$ cioe' se esistono E_3 ed E_4, e $E_3,\ E_4$ sono instabili quando esistono.

2. L'energia cinetica e' data da

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \frac{1}{4}l^2\dot{\theta}^2 - l\dot{x}\dot{\theta}sen\theta) + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2$$

La Lagrangiana dei piccoli moti attorno alla posizione di equilibrio E_1 e' data

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}(m\dot{\eta}_1^2 + \frac{ml^2}{3}\dot{\eta}_2^2) - \frac{1}{2}(k\eta_1^2 + (\frac{fl}{2} + \frac{kl^2}{4})\eta_2^2)$$

con $\eta_1 = x - \bar{x}, \eta_2 = \theta$.
Le equazioni dei piccoli moti sono disaccoppiate

$$m\ddot{\eta}_1 + k\eta_1 = 0, \quad \frac{ml^2}{3}\ddot{\eta}_2 + (\frac{fl}{2} + \frac{kl^2}{4})\eta_2 = 0$$

e $\lambda_1 = k/m,\ \lambda_2 = 3(\frac{f}{2} + \frac{kl}{4})/ml$