NOME.....COGNOME.....ANNO di CORSO.....

Fisica Matematica, Appello dell' 11/01/2013, A.A. 2012/13

Esercizio 1 . In un piano verticale π, una lamina rettangolare omogenea di massa M e' vincolata a scorrere senza attrito per il lato AB sull'asse delle x di π. Un'asta CD omogenea di massa m e lunghezza l ha l'estremo C vincolato, senza attrito, al baricentro della lamina. Sul punto A della lamina agisce una forza elastica ideale di costante $k > 0$, $-kOA$, essendo O l'origine di un sistema di assi ortogonali nel piano. Assunte come coordinate lagrangiane l'ascissa x del punto A e l'angolo θ che la verticale forma con CD, si chiede:

1_a. Scrivere le equazioni delle piccole oscillazioni del sistema attorno alla posizione di equilibrio stabile e calcolare le pulsazioni proprie nel caso in cui e' $M = m/3$ e $k = 2mg/l$.
1_b. Scrivere le equazioni che permettono di individuare la risultante delle reazioni esterne agenti sulla lamina e la reazione agente tra lamina e asta.

Esercizio 2. Dato il sistema

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = \frac{1}{2}x^2 - x + \mu y - \beta y^3, \quad \mu \in R, \quad \beta \geq 0$$

2_a. Determinare i punti fissi e il loro carattere usando i metodi di Liapunov
2_b. Nel caso $\mu = 0$, $\beta = 0$, studiare le orbite nel piano delle fasi e in particolare, supponendo che $x(0) = 0$, determinare i valori di $\dot{x}_0$ affinche' il sistema abbia orbite periodiche.

Esercizio 3. Dato il sistema di Sturm-Liouville

$$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) + \lambda y(x) = 0, \quad x \in (-1, 1),$$

$$y(-1) = y(1) = 0$$

determinare gli autovalori, le autofunzioni e il prodotto scalare rispetto al quale le autofunzioni sono ortonormali in $L^2(-1, 1)$

Soluzione:

Esercizio 1 . L'energia potenziale del sistema e' $V(x, \theta) = 1/2kx^2 - 1/2mglcos\theta$ e la posizione di equilibrio stabile e' $x = 0, \theta = 0$. La Lagrangiana delle piccole oscillazioni e' data da

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}((M + m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}(kx^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2)$$

e le equazioni dei piccoli moti sono

$$(M + m)\ddot{x} + \frac{1}{2}ml\ddot{\theta} + kx = 0, \qquad \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}ml\ddot{x} + \frac{1}{2}mgl\theta = 0$$

Le soluzioni dell'equazione $det(V - \lambda T) = 0$ (nel caso in cui $M = m/3$ e $k = 2mg/l$), sono
$\lambda_1 = \frac{6}{7}\frac{g}{l}, \quad \lambda_2 = 6\frac{g}{l}$.

L' equazione che individua la reazione esterna agente sulla lamina e' la 1 equazione cardinale applicata all'intero sistema, e quella che individua la reazione (interna) agente sull'asta e' la 1 equazione cardinale per la sola asta

$$M\underline{a}_C + m\underline{a}_G = (M + m)\underline{g} - kOA + \underline{R}^v, \qquad m\underline{a}_G = m\underline{g} + \underline{\Phi}_C$$

Esercizio 2. I punti fissi sono dati da $(x = 0, y = 0)$ e $(x = 2, y = 0)$. Applicando il primo metodo di Liapunov si ha che il punto $(0, 0)$ e' instabile per $\mu > 0$, asintoticamente stabile per $\mu < 0$ mentre per $\mu = 0$ il primo metodo non funziona. Il punto $(2, 0)$ e' instabile per qualunque valore di μ.
Per $\mu = 0$ si prende come funzione di Liapunov "l'energia":

$$W(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x), \quad V(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

La funzione $V(x)$ ha un minimo in $x = 0$. Ne segue che $W(x, y)$ e' definita positiva in un intorno di $(0, 0)$, $W(0, 0) = 0$ e la derivata calcolata lungo le soluzioni del sistema e' semidefinita negativa:

$$\dot{W}(x, y) = -\beta y^4 \leq 0$$

$(0, 0)$ e' un punto di equilibrio stabile.
Nel caso $\mu = 0$, $\beta = 0$, il sistema e' conservativo e si possono studiare le orbite nel piano delle fasi usando la conservazione dell'energia. In particolare se $x(0) = 0$ si hanno orbite periodiche per $\frac{-2}{\sqrt{3}} < \dot{x}_0 < \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Esercizio 3. Gli autovalori sono dati da $\lambda_n = 1 + (\frac{n\pi}{2})^2$ e le autofunzioni

$$y_n(x) = e^{-2x} sen(\frac{n\pi}{2}(x + 1))$$

costituiscono una base per lo spazio $L^2(-1, 1)$ con il prodotto scalare pesato con $p(x) = e^{4x}$.