NOME.....COGNOME.....Anno di Corso.....

Fisica Matematica, Appello del 4/06/2015, A.A. 2014/2015 CIVILI

Esercizio 1. In un piano verticale π, un sistema composto da una lamina rettangolare omogena $ABCD$ di massa m e un'asta omogenea di lunghezza l e ugual massa m e' cosi vincolato: la lamina scorre per il lato AB sull'asse Ox di π e l'asta ha un estremo, H, vincolato a scorrere sull'asse Oy e l'altro e' incernierato all' spigolo C della lamina. I vincoli sono lisci. Sullo spigolo D della lamina agisce una forza costante $F\underline{i}$ dove $\underline{i}$ e' il versore dell'asse Ox.
Assunta come coordinata lagrangiana l'angolo θ che l'asse verticale Oy forma con l'asta si chiede:

1) Riconoscere che il sistema ha un grado di liberta', scrivere la lagrangiana e l'equazione di moto.
2) Calcolare le reazioni esterne agenti sulla lamina e sull'asta nell'istante in cui $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$.
3) (Facoltativo). La risultante delle reazioni agenti sulla lamina e' equivalente ad una forza applicata? Come si puo' individuare il punto di applicazione?

Si risponda ai punti precedenti spiegando, in modo conciso, il ragionamento seguito e i teoremi applicati, verificando che le ipotesi di tali teoremi sono soddisfatte per il sistema in esame.

SOLUZIONE

1. I vincoli sono: $y_A = y_B = 0,\ x_H = 0,\ x_C^A = x_C^L,\ y_C^A = y_C^L$ e il grado di liberta' del sistema e' dato da $n = 3 + 3 - 5 = 1$. La velocita' della lamina e' $\underline{v} = \dot{x}_A \underline{i} = l cos\theta\ \dot{\theta}\ \underline{i}$ e l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema sono date da

$$T = T_L + T_A = \frac{1}{2} m l^2 cos^2\theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2, \qquad V = +mg\frac{l}{2}cos\theta - Flsen\theta + c$$

e l'equazione di moto

$$ml^2(\frac{1}{3} + cos^2\theta)\ddot{\theta} - ml^2 cos\theta sen\theta \dot{\theta}^2 - mg\frac{l}{2}sen\theta - Flcos\theta = 0$$

2. Nell'istante considerato $\ddot{\theta}(\bar{t}) = \frac{3}{4}\frac{F}{ml}$ e proiettando la 1 equazione cardinale per l'intero sistema sugli assi x, y del piano, si ha

$$m\ddot{x}_{G_A}(\bar{t}) + m\ddot{x}_{G_L}(\bar{t}) = F + \Phi, \qquad m\ddot{y}_{G_A}(\bar{t}) = -2mg + R^v$$

dove Φ, R^v sono rispettivamente la reazione esterna agente sull'asta e la risultante delle reazioni esterne agenti sulla lamina. Nell'istante considerato si ha

$$\Phi(\bar{t}) = \frac{1}{8}F, \qquad R^v(\bar{t}) = 2mg$$

La risultante delle reazioni vincolari agenti sulla lamina e' una forza appliata (forze parallele) in un punto Q del lato AB che si trova usando la seconda equazione cardinale per la sola lamina applicata al punto C di contatto tra lamina e asta. Poiche' $\underline{J}_L^{rot} = 0$ si ha

$$CG_L \wedge (m\underline{a}_A - m\underline{g}) = CQ \wedge \underline{R}^v$$