NOME.....COGNOME.....Anno di Corso.....

Fisica Matematica, Appello del 6/02/2014, A.A. 2013/2014 CIVILI

In un piano verticale π una sbarra omogenea AB di massa m e lunghezza l ha in baricentro G vincolato a scorrere senza attrito su una circonferenza fissa del piano di raggio R e centro $C = (R, 0)$. L'estremo B dell'asta e' soggetto ad una forza elastica $-kCB$, $k > 0$.
Assunte come coordinate lagrangiane l'angolo θ che l' asse verticale Oz forma con CG e l'angolo ϕ che la verticale forma con AB,
si chiede:

1) Calcolare le posizioni di equilibrio e studiarne il carattere.

2) Scrivere la prima equazione cardinale e proiettarla sulla tangente e la normale all'orbita descritta dal baricentro. Come si ottiene la seconda equazione del moto usando le equazioni cardinali?

1. Si risponda ai punti precedenti spiegando, in modo conciso, il ragionamento seguito e i teoremi applicati, verificando che le ipotesi di tali teoremi sono soddisfatte per il sistema in esame.
2. **Si ricorda di portare alla prova orale le ricevute attestanti il superamento degli esami propedeutici.**

SOLUZIONE:

L'energia potenziale e' data da

$$V(\theta, \phi) = -mgRcos\theta + \frac{1}{2}klRcos(\phi - \theta)$$

e le posizioni di equilibrio sono le seguenti

$$P_1(\theta = 0, \phi = 0), \quad P_2(\theta = 0, \phi = \pi), \quad P_3(\theta = \pi, \phi = \pi), \quad P_4(\theta = \pi, \phi = 2\pi)$$

Il determinante della matrice Hessiana e $V_{\phi,\phi}$ sono dati da

$$H(\theta, \phi) = -\frac{1}{2}mgR^2klcos\theta cos(\phi - \theta), \quad V_{\phi,\phi} = -\frac{1}{2}klRcos(\phi - \theta)$$

Ne segue che P_1 e P_4 sono punti di sella per V e quindi instabili, P_2 e' un minimo, quindi stabile e P_3 un massimo e quindi instabile.

Dalla prima equazione cardinale

$$m\underline{a}_G = m\underline{g} - kCG + \underline{\Phi}$$

proiettata sulla tangente e sulla normale alla circonferenza descritta dal baricentro si deduce un'equazione pura di moto e la reazione vincolare

$$mR\ddot{\theta} = -\frac{1}{2}klsen(\phi - \theta) - mgsen\theta, \quad mR\dot{\theta}^2 = k(R + \frac{1}{2}lcos(\phi - \theta)) - mgcos\theta + \Phi$$

La seconda equazione di moto si ottiene proiettando la seconda equazione cardinale con polo nel baricentro sull'asse Oy ortogonale al piano

$$\frac{ml^2}{12}\ddot{\phi} = \frac{1}{2}klRsen(\phi - \theta)$$