NOME.....COGNOME.....Anno di Corso.....

Fisica Matematica, Appello del 12/01/2017, A.A. 2016/2017 CIVILI

In un piano verticale π, un disco omogeneo di massa M e raggio R e' vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse Ox di un riferimento cartesiano ortogonale (O, x, y) di π. Una sbarra omogenea OA di massa m e lunghezza l ha il suo estremo O fisso nell'origine degli assi. Il vincolo e' liscio. Tra l'estremo A della sbarra e il centro C del disco agisce una forza elastica ideale di costante $k > 0$.
Assunte come coordinate lagrangiane l'ascissa x di C e l'angolo θ che l'asse Ox forma con OA si chiede:

1) Supponendo $mg = kR$, calcolare le posizioni di equilibrio del sistema e determinarne il carattere.
2) Nel caso in cui $R < 2l$, scrivere la lagrangiana dei piccoli moti attorno alla posizione di equilibrio stabile, le equazioni dei piccoli moti e calcolare le frequenze nel caso in cui $M = \frac{2}{9}m$. ($mg = kR$).
3) Determinare le reazioni agenti sul disco e sulla sbarra in una delle posizioni di equilibrio trovate.

Si risponda ai punti precedenti spiegando, in modo conciso, il ragionamento seguito e i teoremi applicati, verificando che le ipotesi di tali teoremi sono soddisfatte per il sistema in esame.

SOLUZIONE

Dal vincolo di puro rotolamento si ha

$$\underline{v}_C = \dot{x}\ \underline{i} = \underline{\omega}^D \wedge TC$$

essendo T il punto di contatto tra il disco e l'asse Ox.
Ne segue che $\underline{\omega}^D = -\frac{\dot{x}}{R}\underline{k}$, $\underline{k}$ versore dell'asse z.
L'energia cinetica e' data da

$$T = T^S + T^D = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{3M}{2}\dot{x}^2$$

L'energia potenziale e' data da

$$V(x, \theta) = \frac{1}{2}mglsen\theta + \frac{1}{2}k\ (x^2 - 2xlcos\theta - 2lRsen\theta)$$

e ponendo $mg = kR$ le posizioni di equilibrio sono

$$E_1(x = 0, \theta = \pi/2),\ E_2(x = 0, \theta = 3\pi/2),\ E_3(x = l\sqrt{1-\lambda^2}, \theta = arcsen\lambda),\ E_4(x = -x_3, \theta = \pi - \theta_3)$$

$E_3,\ E_4$ esistono solo se $\lambda = \frac{R}{2l} < 1$.

E_1 e' stabile se $\lambda > 1$, cioe' se non esistono E_3 ed E_4 E_2 e' instabile $\forall\lambda$ e $E_3,\ E_4$ sono stabili quando esistono. Se $\lambda = 1$, $E_1 = E_3 = E_4$.

Per $R < 2l$ le posizioni di equilibrio stabili sono E_3, E_4 e la La Lagrangiana dei piccoli moti attorno ad una di esse e' data

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}(\frac{3M}{2}\dot{\eta}_1^2 + \frac{ml^2}{3}\dot{\eta}_2^2) - \frac{1}{2}(k\eta_1^2 + kl^2\eta_2^2 + kR\eta_1\eta_2)$$

con $\eta_1 = x, \eta_1 = \theta$.

Le equazioni dei piccoli moti sono

$$\frac{3}{2}M\ddot{\eta}_1 + k\eta_1 + \frac{kR}{2}\eta_2 = 0, \quad \frac{ml^2}{3}\ddot{\eta}_2 + kl^2\eta_2\frac{kR}{2}\eta_1 = 0$$

e nel caso in cui e' $M = \frac{2}{9}m$, le soluzioni di $det(V - \lambda T) = 0$, sono $\lambda_1 = \frac{3k}{m}(1 - \frac{R}{2l})$, $\lambda_2 = \frac{3k}{m}(1 + \frac{R}{2l})$, (entrambe positive).

La reazione vincolare $\underline{\psi}$ agente sul disco e la reazione $\underline{R}^v$ agente sulla sbarra si ricavano dalla 1 equazione cardinale applicata al disco e sbarra rispettivamente e che calcolate in una delle posizioni di euilibrio (ad es. E_1) danno

$$R_x^v = 0,\ R_y^v = mg - k(R - l),\ \psi_x = 0,\ \psi_y = Mg + k(R - l)$$