NOME.....COGNOME.....MATRICOLA.....ANNO DI CORSO....

**Fisica Matematica , Appello del 10/2/2016, A.A. 2015/16 CIVILI**

**Esercizio 1.** Dato il sistema dinamico

$$\dot{x} = -y + x(\sqrt{x^2+y^2} - \alpha) - y(\sqrt{x^2+y^2} + 1) \qquad \dot{y} = x + y(\sqrt{x^2+y^2} - \alpha) + x(\sqrt{x^2+y^2} + 1), \quad \alpha \in R$$

Studiare, al variare di $\alpha$, la stabilita' dell'origine di $R^2$, verificare la presenza di un ciclo limite, determinarne il carattere e il periodo. E' presente una biforcazione? Di che tipo?

Soluzione:
1) La traccia e il determinante dello Jacobiano calcolato in $P = (0,0)$ sono: $TrA = -2\alpha$, $detA = \alpha^2 + 4$. Ne segue che se $\alpha > 0$, $P$ e' asintoticamente stabile, se $\alpha < 0$, $P$ e' instabile e se $\alpha = 0$ , il primo metodo di Liapunov non da informazioni sulla stabilita' di $P$.
Per $\alpha = 0$ si applica il secondo metodo prendendo come funzione di Liapunov $W(x,y) = x^2 + y^2$. Si ha che lungo le soluzioni del sistema

$$\dot{W} = 2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2} > 0$$

ne segue che $P$ e' instabile anche per $\alpha = 0$. Notiamo inoltre che gli autovalori dello Jacobiano sono dati da $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i$ che presuppone una biforcazione alla Hopf.
Passando a coordinate polari nel piano il sistema si scrive come:

$$\dot{\rho} = \rho(\rho - \alpha), \qquad \dot{\theta} = (\rho + 2)$$

Dalla prima equazione si ricava che $\dot{\rho} = 0$ per $\rho = 0$ e per $\rho = \alpha$ con $\alpha > 0$.
Inoltre $\dot{\rho} > 0$ per $\rho > \alpha$ e $\dot{\rho} < 0$ per $\rho < \alpha$. Il ciclo limite e' instabile. Il periodo e' dato da $T = \frac{2\pi}{(\alpha+2)}$ e il ciclo e' percorso in verso antiorario. Siamo in presenza di una biforcazione alla Hopf subcritica.