Fisica Matematica , Parte II, Appello del 13/01/2010, A.A. 2009/10 CIVILI

NOME.....COGNOME.....MATRICOLA.....ANNO DI CORSO...

Esercizio 1. Dato il sistema dinamico

$$\dot{x} = x(\alpha - x^2 + y), \qquad \dot{y} = -y - x^2, \quad \alpha \in R$$

1. Studiare i punti fissi (di equilibrio) al variare di α
2. Determinarne, al variare di α, il carattere usando, se possibile, il 1^0 metodo di Liapunov (linearizzazione)
3. Attraverso il 2^0 metodo di Liapunov, determinare i valori di a, b affinche' la funzione

$$W(x, y) = ax^2 + by^2$$

sia una funzione di Liapunov atta ad individuare le proprieta' di stabilita' quando il 1^0 metodo non puo' essere applicato.

Esercizio 2. Studiare le oscillazioni trasversali di una sbarra elastica descritte dal problema

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in (0, l), \ t > 0$$
$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = a, \quad u_t(x, 0) = cos(\pi x/l) + cos(3\pi x/l) \quad x \in (0, l)$$

SOLUZIONE:

1. I punti critici sono: $P_1 = (0, 0)$ che esiste per qualunque valore di α e per $\alpha > 0$ $P_{2,3} = (\pm\sqrt{\alpha/2}, -\alpha/2)$. Gli autovalori della matrice jacobiana $J(0, 0)$ sono $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = -1$. Ne segue che per $\alpha < 0$ P_1 e' asintoticamente stabile, per $\alpha > 0$ e' instabile e per $\alpha = 0$ si deve applicare il 2^0 metodo di Liapunov. Se $a = b > 0$ la funzione Wassicura l'asintotica stabilita' di P_1. $P_{2,3}$ quando esistono sono asintoticamente stabili.

2.
$$u(x, t) = a + \frac{l}{\pi} sen(\frac{\pi}{l} t) \ cos(\frac{\pi}{l} x) + \frac{l}{3\pi} sen(\frac{3\pi}{l} t) cos(\frac{3\pi}{l} x)$$