NOME.....COGNOME.....Anno di Corso.....

Fisica Matematica, Appello del 16/09/2014, A.A. 2013/2014 CIVILI

Esercizio 1. In un piano verticale $\pi = (O, x, z)$ un disco omogeneo di massa m e raggio R ha un punto del suo bordo, sia A, vincolato a scorrere senza attrito sull'asse Ox del piano. Sul centro C del disco agisce una forza elastica $-kOC$, $k > 0$.
Assunte come coordinate lagrangiane l'ascissa x di A e l'angolo θ che la verticale forma con AC, si chiede

1) Calcolare le posizioni di equilibrio e studiarne il carattere

2) Scrivere le equazioni dei piccoli moti attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

3) Determinare le pulsazioni proprie.

SOLUZIONE:

L'energia potenziale e' data da

$$V(x, \theta) = -mgRcos\theta + \frac{1}{2}k(x^2 + 2Rxsen\theta)$$

e le posizioni di equilibrio sono le seguenti

$$P_1 = (x = 0, \theta = 0), \quad P_2 = (x = 0, \theta = \pi), P_3 = (x = -R\sqrt{1-\lambda^2}, \theta = arcos\lambda), P_4 = (x = -x_3, \theta = 2\pi - \theta_3)$$

Queste due ultime posizioni di equilibrio esistono se $\lambda = \frac{mg}{kR} < 1$.
Il determinante della matrice Hessiana e' dato da

$$H(x, \theta) = k(-kRxsen\theta + mgRcos\theta) - (kRcos\theta)^2$$

Ne segue che P_1 e' stabile se $mg > kR$ cioe' se non esistono P_3, P_4, P_2 e' sempre instabile e P_3, P_4 sono stabili quando esistono cioe' per $\frac{mg}{kR} < 1$.

L'energia cinetica e' data da

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + \frac{3mR^2}{2}\dot{\theta}^2 + 2mR\dot{x}\dot{\theta}cos\theta)$$

e la lagrangiana delle piccole oscillazioni attorno a P_1 che e' stabile se $mg > kR$ e' data da

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + \frac{3mR^2}{2}\dot{\theta}^2 + 2mR\dot{x}\dot{\theta}) - \frac{1}{2}(kx^2 + 2kRx\theta + +mgR\theta^2)$$

da cui si ricavano le equazioni dei piccoli moti

$$m\ddot{x} + mR\ddot{\theta} + kx + kR\theta = 0, \qquad \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta} + mR\ddot{x} + mgR\theta + kRx = 0$$

Dall'equazione $det(V - \lambda T) = 0$ si ricava $\lambda_1 = \frac{k}{m}$ e $\lambda_2 = \frac{g}{R} - \frac{k}{m} > 0$ perche' $mg > kR$