NOME.....COGNOME.....MATRICOLA.....ANNO DI CORSO....

Fisica Matematica, Appello del 17/02/2015, A.A. 2014/15 CIVILI

Esercizio 2. Dato il sistema dinamico

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x\alpha - \beta y^3, \quad \beta \geq 0,$$

studiare, al variare di $\alpha \in R$, la stabilita' dei punti di equilibrio con i metodi di Liapunov e la biforcazione.

Per $\beta = 0$ studiare le orbite nel piano delle fasi al variare di α discutendo la possibilita' di orbite periodiche

Soluzione

Le posizioni di equilibrio sono $P_1 = (x = 0, y = 0)$, $P_{2,3} = (x = \pm\sqrt{2\alpha}, y = 0)$. $P_{2,3}$ esistono solo per $\alpha > 0$ e coincidono co P_1 per $\alpha = 0$.
La traccia e il determinante dello Jacobiano calcolato in $(0,0)$ sono dati da : $TrA = 0$, $detA = -\alpha/2$. Per $\alpha > 0$ il punto e' instabile, per $\alpha \leq 0$ il primo metodo di Liapunov non da informazioni sulla stabilita'.
La traccia e il determinante dello Jacobiano calcolato in $(\pm\sqrt{2\alpha}, 0)$ sono dati da: $TrA = 0$, $detA = \alpha > 0$ e il primo metodo di Liapunov non da informazioni sulla stabilita'.

Per applicare il secondo metodo si prende come funzione di Liapunov l'energia

$$W(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}\alpha x^2 + c$$

a) Per $\alpha \leq 0$: $W(0,0) = 0$ con $c = 0$, $W(x,y)$ e' definita positiva in un intorno del punto $(0,0)$ perche' $V(x)$ ha un minimo in $(0,0)$ e $\dot{W} = -\beta y^4 \leq 0$ lungo le soluzioni.
Ne segue che P_1 e' stabile

b) $\alpha > 0$: $W(\pm\sqrt{2\alpha}, 0) = 0$ con $c = 1/4\alpha^2$, $W(x,y)$ e' definita positiva in un intorno del punto $(\pm\sqrt{2\alpha}, 0)$ perche' $V(x)$ ha un minimo in $(\pm\sqrt{2\alpha}, 0)$ e $\dot{W} = -\beta y^4 \leq 0$ lungo le soluzioni. Ne segue che $P_{2,3}$ sono stabili quando esistono.

Per $\beta = 0$ il sistema e' conservativo e graficando la funzione $V(x)$ si studiano le orbite nel piano delle fasi.
Per $\alpha \leq 0$ si hanno orbite periodiche per qualunque valore di $E > 0$.
Per $\alpha > 0$ si hanno orbite periodiche per $V_{min} < E$, $E \neq 0$.