Fisica Matematica, Parte II Appello del 2/03/2011

NOME.....COGNOME.....MATRICOLA.....

Esercizio 1. Dato il sistema descritto dall'equazione

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - x^3 + \mu x = 0, \quad \mu \in R$$

1. Determinare i punti fissi (di equilibrio) al variare di μ e il loro carattere usando i metodi di Liapunov
2. Disegnare il grafico di biforcazione nel piano (x, μ)

Esercizio 2. Data l'equazione con i dati iniziali

$$\ddot{x} = x^2 - x, \qquad x(0) = x_0, \ \dot{x}(0) = 0$$

disegnare il ritratto di fase delle orbite e determinare i valori di x_0 affinche' il sistema abbia orbite periodiche

Esercizio 3. Studiare le oscillazioni trasversali di una sbarra elastica descritte dal problema

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \quad x \in (0, \pi), \ t > 0$$
$$u_x(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = cos\frac{3}{2}x - cos\frac{7}{2}x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in (0, \pi)$$

SOLUZIONE

1. Le posizioni di equlibrio sono: $P_1 = (x = 0, y = 0)$ e se $\mu > 0$ $\mathrm{P}_2 = (+\sqrt{\mu}, 0), P_3 = (-\sqrt{\mu}, 0)$. Dal primo metodo di Liapunov si ricava che il punto $(0, 0)$ e' instabile per $\mu < 0$ e per $\mu > 0$ asintoticamente stabile, mentre P_2 e P_3 sono instabili quando esitono. Per $\mu = 0$ l'energia non e' una buona funzione di Liapunov perche' non e' definita positiva. Il ritratto di fase relativo alla funzione $V(x) = -x^4/4$ mostra che le orbite si allontanano dall'origine che e' instabile.
Ricapitolando: per $\mu \leq 0$ il punto $(0, 0)$ e' instabile, e per $\mu > 0$ asintoticamente stabile e le due nuove posizioni di equilibrio sono instabili.

2. Si hanno orbite periodiche, omocline e illimitate a secondo dei diversi valori dell'energia. Per avere orbite periodiche in corrispondenza ad una velocita' iniziale nulla deve essere $-1/2 < x_0 < 1$ ($0 < E < 1/6$).

3. La soluzione del problema e'

$$u(x, t) = cos3t \ cos\frac{3}{2}x - cos7t \ cos\frac{7}{2}x$$