NOME.....COGNOME.....MATRICOLA.....ANNO DI CORSO....

Fisica Matematica, Appello del 12/01/2017, A.A. 2016/17 CIVILI

Dato il sistema

$$\dot{x} = y + \beta y^3 \qquad \dot{y} = -x(\alpha + 2x^2), \quad \beta > 0, \quad \alpha \in R$$

Studiare, al variare di α, le posizioni di equilibrio e la stabilita'.

Nel caso $\beta = 0$ e $\alpha < 0$ dire per quali condizioni iniziali si hanno orbite omocline.

Soluzione:
1) I punti di equilibrio sono $P_1 = (x = 0, y = 0), P_{2,3} = (x = \sqrt{-\alpha/2}, y = 0)$. Questi ultimi esistono solo per $\alpha < 0$.
La traccia e il determinante dello Jacobiano calcolato in P_1 sono: $TrA = 0$, $detA = \alpha$. Ne segue che se $\alpha \geq 0$, il 1 metodo di Liapunov non dice nulla sulla stabilita'. Se $\alpha < 0$, P_1 e' instabile.

La traccia e il determinante dello Jacobiano calcolato in $P_{2,3}$ sono: $TrA = 0$, $detA = -2\alpha$. Poiche' $\alpha < 0$, ne segue che il 1 metodo di Liapunov non dice nulla sulla stabilita'.

Il sistema ammette un integrale primo

$$H(x, y) = \alpha\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} + \frac{y^2}{2} + \beta\frac{y^4}{4} + c$$

che puo' essere presa come funzione di Liapunov per P_1 quando $\alpha \geq 0$ assicurando la stabilita' ($c = 0$).

Si verifica che H e' definita positiva in un intorno di $P_{2,3}$ ($c = \alpha^2/8$) e $P_{2,3}$ sono stabili per $\alpha < 0$.

Si hanno due orbite omocline per $E = 0$ e $x_0 \in [-\sqrt{-\alpha}, 0) \cup (0, \sqrt{-\alpha}]$ con $\alpha < 0$