NOME.....COGNOME.....Anno di Corso.....

Fisica Matematica, Appello del 3/07/2013, A.A. 2012/2013 CIVILI

Esercizio 1. In un piano verticale π, un disco omogeneo di massa M e raggio R e' vincolato a ruotare attorno ad un asse ortogonale a π e passante per il punto O del suo bordo che si assume come origine di un sistema di assi cartesiani (O, x, z) nel piano.
Sia θ l'angolo che l'asse verticale forma con OC, essendo C il centro del disco.

Un punto P di massa m e' vincolato senza attrito a scorrere lungo una guida coincidente con il diametro del disco ortogonale a OC. Stabilito su tale guida un sistema di ascisse con origine in C e verso da C verso P si indichi con s l'ascissa di P lungo tale guida.
Il punto e' soggetto ad una forza elastica $-kOP$, $k > 0$, Assunte come coordinate lagrangiane l'ascissa s di P del disco e l'angolo θ,

si chiede:

1) Calcolare le posizioni di equilibrio del sistema e determinarne il carattere (si assuma $M = 2m$).
2) Scrivere le equazioni di Lagrange del moto del sistema
3) (facoltativo) Dire se esistono valori del parametro k per il quale sono possibili moti con $\theta(t) = 0\ \forall t$. In caso affermativo calcolare $s = s(t)$

SOLUZIONE:

$$OP = OC + CP = Rsen\theta\underline{i} + Rcos\theta\underline{k} + s(cos\theta\underline{i} - sen\theta\underline{k})$$

$$V(s,\theta) = \frac{1}{2}ks^2 - MgRcos\theta - mg(Rcos\theta - s\ sen\theta)$$

Le posizioni di equilibrio sono

$$P_1 = (s = 0, \theta = 0),\ P_2 = (s = 0, \theta = \pi),$$

$$\mathrm{P}_3 = (s = -\tfrac{mg}{k}\sqrt{1 - (\tfrac{3kR}{mg})^2},\ \theta = arcos(\tfrac{3kR}{mg})),\ P_4 = (s = +\tfrac{mg}{k}\sqrt{1 - (\tfrac{3kR}{mg})^2},\ \theta = 2\pi - arcos(\tfrac{3kR}{mg}))$$

P_3, P_4 esistono solo se $\frac{3kR}{mg} < 1$.
Dall'esame delle derivate seconde dell'energia potenziale si ha che P_1 e' stabile se $\frac{3kR}{mg} > 1$, cioe' se non esistono P_3, P_4, P_2 e' instabile qualunque siano i parametri.
P_3, P_4 sono stabili quandi esistono.

$$T = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv_P^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{s}^2 + s^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{s}\dot{\theta})$$

e le equazioni del moto sono

$$\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta} + mR^2\ddot{\theta} + mR\ddot{s} + m(2s\dot{s}\dot{\theta} + s^2\ddot{\theta}) + (M + m)Rg\ sen\theta + mg\ s\ cos\theta = 0$$

$$m(\ddot{s} + R\ddot{\theta}) - ms\dot{\theta}^2 + ks + mgsen\theta = 0$$

I moti con $\theta(t) = 0\ \ \forall t$ sono possibili purche' $k = mg/R$. In questo caso e' $s(t) = Acos(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi)$