NOME.....COGNOME.....MATRICOLA.....ANNO DI CORSO....

Fisica Matematica , Appello del 3/7/2013, A.A. 2012/13 CIVILI

Esercizio 2. Dato il sistema

$$\dot{x} = y \qquad \dot{y} = -xe^x - \beta y, \quad \beta \geq 0$$

Studiare, al variare di β, il carattere della posizione di equilibrio.
Nel caso in cui e' $\beta = 0$, studiare le orbite nel piano delle fasi. In particolare, se $x_0 = 0$, dire per quali valori della velocita' iniziale si hanno orbite periodiche.

Esercizio 3. Dato il sistema dinamico

$$\dot{x} = -2x + f(y) \qquad \dot{y} = -3x - 4f(y),$$

dove $f(y)$ e' una funzione di classe C^1, dispari ($f(0) = 0$) e tale che $f(y) > 0$ per $y > 0$,
dire per quali valori di a, b la funzione

$$W(x, y) = ax^2 + b\int_0^y f(s)ds$$

e' una funzione di Liapunov per il sistema precedente.

Soluzione:

2) La traccia e il determinante dello Jacobiano calcolato in $P = (0, 0)$ sono: $TrA = -\beta$, $detA = 1$. Ne segue che per $\beta > 0$, P e' asintoticamente stabile e per $\beta = 0$, il primo metodo di Liapunov non da informazioni.
Per $\beta = 0$ si applica il secondo metodo prendendo come funzione di Liapunov l'energia $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$, con

$$V(x) = \int xe^x dx = e^x(x - 1) + c$$

con $c = 1$. Studiando il grafico di $V(x)$ si vede che in $x = 0$ si ha un minimo e per il teorema di Dirichlet-Lagrange P e' stabile.
Lo studio delle orbite nel piano delle fasi ci dice che si hanno orbite periodiche per $0 < E < 1$. Ne segue che se $x_0 = 0$, perche' ci siano orbite periodiche la velocita' iniziale deve essere $-\sqrt{2} < \dot{x}_0 < \sqrt{2}$

3) La funzione $W(x, y)$ verifica le ipotesi del teorema di Liapunov sull'asintotica stabilita con $a = 3/2b, b > 0$
Infatti $W(0, 0) = 0$, $W(x, y) > 0$ in un intorno dell'origine (l'integrale di $f(y)$ e' una funzione pari e $a, b > 0$), e la derivata calcolata lungo le soluzioni e'

$$\dot{W} = -b(3x^2 + 2f(y)^2) < 0$$