NOME.....COGNOME.....Anno di Corso.....

Fisica Matematica, Appello straordinario del 04/04/2014, A.A. 2013/2014 CIVILI

In un piano verticale π una sbarra omogenea AB di massa m e lunghezza l ha gli estremi vincolati a scorrere senza attrito sugli assi cartesiani Oz, Ox del piano. L'estremo B dell'asta e' soggetto ad una forza elastica $-kOB$, $k > 0$.
Assunta come coordinata lagrangiana l'angolo θ che l' asse orizzontale Ox forma con AB si chiede:

1) Calcolare le posizioni di equilibrio e studiarne il carattere.

2) Calcolare le reazioni vincolari nell'istante in cui l'atto di moto e' nullo e $\theta = 0$.

3) Considerare la funzione $V(x)$ che si ottiene dall'energia potenziale ponendo $sen\theta = x$: studiare le orbite nel piano delle fasi descritte da un punto che si muove sull'asse delle x soggetto ad una forza di energia potenziale $V(x)$.

4) Dato il sistema

$$\dot{x} = -\alpha y - y^3 \qquad \dot{y} = -\alpha x + x^3, \quad \alpha > 0,$$

studiare le posizioni di equilibrio e il loro carattere utilizzando i metodi di Liapunov.

SOLUZIONE:

1. L'energia potenziale e' data da

$$V(\theta) = -\frac{1}{2}mglsen\theta + \frac{1}{2}kl^2cos^2\theta$$

e le posizioni di equilibrio sono le seguenti

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\pi, \quad \theta_2 = \frac{3}{2}\pi, \quad \theta_3 = arcsen(-\frac{mg}{2kl}), \quad \theta_4 = \pi - \theta_3$$

Queste ultime esistono solo per $\frac{mg}{2kl} < 1$.
Dallo studio della derivata seconda di $V(\theta)$ ne segue che θ_1 e' stabile, θ_2 e' stabile se esistono θ_3 e θ_4 e queste ultime quando esistono sono instabili.

2. Dalla prima equazione cardinale

$$m\underline{a}_G = m\underline{g} - kOB + \underline{\Phi}_A + \underline{\Phi}_B$$

proiettata sugli assi Ox, Oz si calcolano le reazioni vincolari nell'istante assegnato:

$$0 = -kl + \Phi_A, \qquad m\frac{l}{2}\ddot{\theta}(\bar{t}) = mg + \Phi_B$$

e $\ddot{\theta}(\bar{t})$ si ricava dall'equazione di moto

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} - kl^2cos\theta sen\theta - mg\frac{l}{2}cos\theta = 0 \qquad \ddot{\theta}(\bar{t}) = \frac{3g}{2l}$$

3. Il sistema descritto da $V(x) = \frac{1}{2}kl^2 - \frac{1}{2}kl^2x^2 - \frac{1}{2}mglx$ e' un repulsore lineare le cui orbite sono iperboli che intersecano l'asse $x = 0$ per $E > V_{max}$, iperboli che intersecano l'asse $\dot{x} = 0$ per $E < \mathrm{V}_{max}$ e semirette per $E = V_{max}$.

4. I punti di equilibrio sono $E_1 = (0, 0)$, $E_{2,3} = (\pm\sqrt{\alpha}, 0)$. Il primo metodo di Liapunov ci dice che E_1 e' instabile. Applicando il secondo metodo per i punti $E_{2,3}$ si trova come funzione di Liapunov la funzione $H(x, y) = -\frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{2}\alpha y^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 + c$.
Tale funzione soddista il teorema di Liapunov e i punti $E_{2,3}$ sono entrambi stabili.