NOME.....COGNOME.....Anno di Corso.....

Fisica Matematica, Appello del 5/06/2014, A.A. 2013/2014 CIVILI

Esercizio 1. In un piano verticale π una sbarra omogenea AB di massa m e lunghezza l ha l'estremo A vincolato a scorrere senza attrito sull'asse Ox del piano. Sul punto A agisce una forza elastica $-kOA$ e sull'estremo B dell'asta agisce una forza elastica $-kOB$, $k > 0$. Inoltre sull'asta una coppia di forze esercita un momento $\underline{M} = -flsen\theta\underline{j}$ essendo θ l'angolo che l'asse verticale Oz del piano forma con AB e $\underline{j}$ il versore dell'asse Oy ortogonale al piano.
Assunte come coordinate lagrangiane l'ascissa x di A e l'angolo θ, si chiede

1) Calcolare le posizioni di equilibrio e studiarne il carattere nel caso in cui e' $f = \frac{kl}{2}$.

2) Scrivere le equazioni dei piccoli moti attorno alla posizione di equilibrio stabile.

3) Dopo aver verificato che una delle pulsazioni proprie e' data da $\lambda_1 = \frac{2k}{m}$, determinare l'altra.

SOLUZIONE:

L'energia potenziale e' data da

$$V(x,\theta) = -\frac{mgl}{2}cos\theta - flcos\theta + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k(x^2 + 2lxsen\theta) + c$$

e le posizioni di equilibrio sono le seguenti ($f = \frac{kl}{2}$)

$$P_1(x = 0, \theta = 0) \quad P_2(x = 0, \theta = \pi)$$

Il determinante della matrice Hessiana e' dato da

$$H(x,\theta) = 2k(-klxsen\theta + \frac{1}{2}kl^2cos\theta + \frac{1}{2}mglcos\theta) - (klcos\theta)^2$$

Ne segue che P_1 e' stabile e P_2 instabile.

L'energia cinetica e' data da

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + \frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}cos\theta)$$

e la lagrangiana delle piccole oscillazioni attorno a P_1 e' data da

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + \frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}) - \frac{1}{2}(2kx^2 + 2klx\theta + \frac{1}{2}(kl^2 + mgl)\theta^2)$$

da cui si ricavano le equazioni dei piccoli moti

$$m\ddot{x} + \frac{1}{2}ml\ddot{\theta} + 2kx + kl\theta = 0, \qquad \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}ml\ddot{x} + \frac{1}{2}(kl^2 + mgl)\theta + klx = 0$$

Dall'equazione $det(V - \lambda T) = 0$ si ricava $\lambda_1 = \frac{2k}{m}$ e $\lambda_2 = \frac{6g}{l}$