NOME.....COGNOME.....MATRICOLA.....ANNO DI CORSO....

Fisica Matematica, Appello del 5/06/2013, A.A. 2013/14 CIVILI

Esercizio 2. Dato il sistema dinamico

$$\dot{x} = y - \alpha(x^2 + x - 2), \qquad \dot{y} = -(x^2 + x - 2) - \alpha y^3$$

Studiare, al variare di $\alpha \in R$, la stabilita' dei punti di equilibrio con i metodi di Liapunov.

Per $\alpha = 0$ studiare le orbite nel piano delle fasi e in particolare dire per quali valori delle condizioni iniziali si hanno orbite omocline.
Per condizioni iniziali tali che l'energia $E = 4$ che orbite si hanno?

Soluzione

Le posizioni di equilibrio sono $P_1 = (x = 1, y = 0)$, $P_2 = (x = -2, y = 0)$.
La traccia e il determinante dello Jacobiano calcolato in $(1, 0)$ sono: $TrA = -\alpha$, $detA = 1$. Per $\alpha > 0$ il punto e' asintoticamente stabile, per $\alpha < 0$ e' instabile. Per $\alpha = 0$ il primo metodo di Liapunov non da informazioni sulla stabilita'.
La traccia e il determinante dello Jacobiano calcolato in $(-2, 0)$ sono: $TrA = 3\alpha$, $detA = -3$. P_2 e' instabile per qualunque valore di α.

Per $\alpha = 0$ il sistema e' conservativo e come funzione di Liapunov si prende l'energia del sistema $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$ dove $V(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + c$.

$E(1, 0) = 0$ con $c = \frac{7}{6}$, $\dot{E} = 0$ lungo le soluzioni perche' il sistema e' conservativo e studiando la funzione $V(x)$ si vede che in $x = 1$ si ha un minimo per $V(x)$. Ne segue che $E(x, y)$ e' definita positiva in un intorno del punto P_1 e il teorema di Liapunov assicura la stabilita' di P_1.

Graficando la funzione $V(x)$ si studiano le orbite nel piano delle fasi.
Si ha un'orbita omoclina per le condizioni iniziali tali che

$$\frac{1}{2}y_0^2 + V(x_0) = \frac{27}{6}, \quad x_0 \in (-2, x_1],$$

dove x_1, soluzione di $V(x) = \frac{27}{6}$, e' uguale a $x_1 = \frac{5}{2}$.
Per $E = 4$ e $x_0 \in [x_-, x_+]$ si hanno orbite periodiche. x_-, x_+ sono le radici di $V(x) = 4$