Fisica Matematica, Appello del 7/02/2012, A.A. 2012/2013 CIVILI

Esercizio 1. In un piano verticale π, un disco omogeneo di massa M e raggio R e' vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse orizzontale Ox di π. Un punto P di massa m e' vincolato senza attrito a scorrere lungo il bordo del disco. Il punto e' soggetto ad una forza elastica $-kOP$, $k > 0$, essendo O l'origine di π. Assunte come coordinate lagrangiane l'ascissa x del centro C del disco e l'angolo θ che l'asse orizzontale forma con CP, si chiede:

1) Calcolare le posizioni di equilibrio del sistema e determinarne il carattere.
2) Calcolare la reazione vincolare agente sul disco nel punto di contatto con l'asse Ox nel generico istante
3) Si supponga ora $k = 0$: scrivere la Lagrangiana del sistema, determinare la presenza di integrali primi e darne l'eventuale significato fisico.

Esercizio 2. Dato il sistema dinamico

$$\dot{x} = \alpha x - 2y - x(x^2 + y^2)^{1/4}, \qquad \dot{y} = 2x + \alpha y - y(x^2 + y^2)^{1/4}, \quad \alpha \in R$$

1. Studiare, al variare di α, la stabilita' della posizione di equilibrio $(0, 0)$
2. Determinarne l'esistenza di un ciclo limite e la biforcazione alla Hopf.

Esercizio 3. Studiare le oscillazioni trasversali di una sbarra elastica descritte dal problema

$$u_{tt} - u_{xx} + u = 0, \quad x \in (0, \pi), \ t > 0$$

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = cos(5x), \quad u_t(x, 0) = cos(10x), \quad x \in (0, \pi)$$

Soluzione:

1. L'energia potenziale del sistema e' data da

$$V(x, \theta) = \frac{1}{2}k(x^2 + 2xRcos\theta + 2R^2 sen\theta) + mgRsen\theta$$

e le posizioni di equilibrio sono: $E_1(x = 0, \theta = \frac{\pi}{2})$, $E_2(x = 0, \theta = \frac{3\pi}{2})$. E_1 e' instabile e E_2 stabile.
Per calcolare le componenti della reazione vincolare agente sul disco nel suo punto di contatto con l'asse Ox, si scrive la 1 equazione cardinale per l'intero sistema:

$$m\underline{a}_P + M\underline{a}_C = (m + M)\underline{g} - kOP + \underline{\phi}_T$$

essendo T il punto di contatto disco-asse Ox. Proiettata sugli assi del piano tale equazione fornisce le due componenti della reazione $\underline{\phi}_T$.
Supponiamo ora $k = 0$: la Lagrangiana del sistema si scrive

$$L = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(^2 + R^2\dot{\theta}^2 - 2R\dot{x}\dot{\theta}sen\theta) - mgRsen\theta$$

tenendo conto che la velocita' angolare del disco e' $\underline{\omega} = -\frac{\dot{x}}{R}\underline{k}$ a causa del vincolo di puro rotolamento.
Dall'esame della Lagrangiana si deducono due integrali primi: il momento cinetico coniugato alla variabile x e l'energia generalizzata.

$$p_x = \frac{3}{2}M\dot{x} + m(\dot{x} - R\dot{\theta}sen\theta)$$

non ha nessun significato fisico: infatti la quantita' di moto lungo l'asse x non si conserva per la presenza della forza di attrito nel contatto disco asse x, mentre l'energia generalizzata coincide con l'energia meccanica essendo i vincoli fissi.

2. Il primo metodo di Liapunov ci assicura l'asintotica stabilita' della posizione di equilibrio $(0,0)$ nel caso $\alpha < 0$, l'instabilita' nel caso $\alpha > 0$ ($TrA = 2\alpha,\ detA = \alpha^2 + 4$) e non ci dice nulla quando $\alpha = 0$. In quest'ultimo caso si prende come funzione di Liapunov $W(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ e si osserva che e' definita positiva, e' nulla in $(0,0)$ e la sua derivata di Lie e'

$$\dot{W} = -(x^2 + y^2)^{1/4}(x^2 + y^2) < 0$$

che prova l'asintotica stabilita' dell'origine anche nel caso $\alpha = 0$.
Passando a coordinate polari, il sistema si scrive come

$$\dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^{1/2}), \qquad \dot{\theta} = 2$$

Si osserva che $\dot{\rho} > 0$ se $\rho^{1/2} < \alpha$ con $\alpha > 0$, e che $\dot{\rho} < 0$ se $\rho^{1/2} > \alpha$ con $\alpha > 0$: se $\alpha > 0$, esiste un ciclo limite attrattivo che e' una circonferenza di raggio $\rho = \alpha^2$ percorsa con periodo $T = \pi$ e si ha una biforcazione alla Hopf.

3. La separazione di variabili da' luogo ad autovalori ed ad autofunzioni

$$\lambda_n = 1 + n^2, \quad X_n = cos(nx), \quad n \geq 0$$

Ne segue che

$$u(x,t) = \Sigma_0^\infty (a_n cos(\sqrt{1+n^2}t) + b_n sen(\sqrt{1+n^2}t))cos(nx)$$

tenendo conto delle condizioni iniziali del problema si ha che

$$a_0 = b_0 = 0, \quad a_5 = 1,\ a_n = 0 \ \ n \neq 5, \quad b_{10} = \sqrt{1/\lambda_{10}}, \ \ b_n = 0, \ \ n \neq 10.$$

La soluzione e' quindi data da

$$u(x,t) = cos(\sqrt{2}6\ t)cos(5x) + \frac{1}{\sqrt{1}01}cos(\sqrt{1}01\ t)cos(10x)$$