NOME.....COGNOME.....

Fisica Matematica, Parte I, Appello dell' 13/02/2012, A.A. 2011/12 CIVILI

In un piano verticale π, una lamina omogenea costituita da un quadrato $ABCD$ di massa m e lato l ha il vertice A vincolato a scorrere senza attrito sull'asse orizzontale Ox del piano. Sul baricentro G della lamina agisce una forza elastica $-kOG$, $k > 0$, essendo O l'origine di un sistema di assi cartesiani nel piano. Assunte come coordinate lagrangiane l'ascissa x di A e l'angolo θ che l'asse verticale Oz di π forma con la diagonale della lamina AC, si chiede:

1) Calcolare le posizioni di equilibrio del sistema e determinarne il carattere.

2) Scrivere le equazioni di Lagrange del moto e calcolare la reazione vincolare agente sulla lamina nell'istante in cui $\theta = \pi/2,\ x = 0$ e l'atto di moto e' nullo

3) Verificare la possibilita di moti nei quali $\theta(t) = 0\ \forall t$ e in corrispondenza calcolare la legge $x = x(t)$

SOLUZIONE

$$V(x,\theta) = -mg\frac{\sqrt{2}}{2}lcos\theta + k(\frac{1}{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}lxsen\theta)$$

le posizioni di equilibrio sono

$$P_1(0,0), \quad P_2(0,\pi), \quad P_{3,4} = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}l\sqrt{1-(\frac{\sqrt{2}mg}{kl})^2},\ \pm arcos(\frac{\sqrt{2}mg}{kl}))$$

$P_{3,4}$ esistono se $\frac{\sqrt{2}mg}{kl} < 1$. P_1 e' stabile se non esistono $P_{3,4}$ cioe' se $\frac{\sqrt{2}mg}{kl} > 1$, P_2 e' instabile e $P_{3,4}$ quando esistono sono stabili. L'energia cinetica della lamina e'

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2 + \sqrt{2}l\dot{x}\dot{\theta}cos\theta) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2$$

dove il momento di inerzia e' dato da $I_G = ml^2/6$

Le equazioni di Lagrange sono

$$m\ddot{x} + m\frac{\sqrt{2}}{2}l\ddot{\theta}cos\theta - m\frac{\sqrt{2}}{2}l\dot{\theta}^2sen\theta + k(x + \frac{\sqrt{2}}{2}lsen\theta) = 0$$

$$\frac{2}{3}ml^2\ddot{\theta} + m\frac{\sqrt{2}}{2}l\ddot{x}cos\theta + mg\frac{\sqrt{2}}{2}lsen\theta + k\frac{\sqrt{2}}{2}lxcos\theta = 0$$

e la reazione vincolare calcolata nell'istante in cui $\theta = \pi/2,\ x = 0$ e l'atto di moto e' nullo, e' data da $\Phi_z = -mg/4$

Sono possibili moti in cui e' $\theta(t) = 0\ \forall t$. Infatti da entrambe le equazioni di moto si ricava la stessa legge per $x(t)$: $m\ddot{x} + kx = 0$ e cioe' legge di moto armonico per $x(t)$.