Fisica Matematica, Appello dell' 13/02/2012, II Parte

NOME.....COGNOME.....MATRICOLA.....

Esercizio 1. Studiare le posizioni di equilibrio del seguente sistema

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = \alpha x - y - x^3 - yx^2$$

al variare di $\alpha \in R$ e il loro carattere usando i metodi di Liapunov. Disegnare il diagramma di biforcazione

Esercizio 2. Determinate gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \quad x \in (-1, 1)$$
$$y(-1) = y(1) = 0$$

e verificare che costituiscono una base per lo spazio $L^2(-1, 1)$.

Esercizio 3. Studiare le orbite nel piano delle fasi per il repulsore armonico

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0$$

al variare delle condizioni iniziali.

SOLUZIONE:

1. Le soluzioni di equilibrio sono $P_1 = (0, 0)$ e se $\alpha > 0$ $P_{2,3} = (\pm\sqrt{\alpha}, 0)$.
Usando il 1 metodo di Liapunov si ha che P_1 e' asintoticamente stabile se $\alpha < 0$, instabile se $\alpha > 0$. Per $\alpha = 0$ si usa il 2 metodo prendendo come funzione di Liapunov l'energia $W(x, y) = 1/2y^2 + 1/4x^4$. Ne segue che P_1 e' stabile. Usando il 1 metodo si ha che $P_{2,3}$ sono asintoticamente stabili quando esistono.

2. Gli autovalori sono dati da $\lambda_n = (n\pi/2)^2$ e le autofunzioni da

$$y_n = sen\frac{n\pi(1 + x)}{2}$$

Si verifica facilmente (con un cambio di variabili) che sono ortonormali rispetto al prodotto scalare in $L^2(-1, 1)$.

3. Per $E > 0$ le orbite sono iperboli che intersecano l'asse $\dot{x}$ nei punti $\dot{x} = \pm\sqrt{2E}$.
Per $E < 0$ le orbite sono iperboli che intersecano l'asse x nei punti $x = \pm\sqrt{-2E/\omega^2}$.
Per $E = 0$ le orbite sono rette per l'origine del piano delle fasi di equazione $\dot{x} = \pm\omega x$.