NOME.....COGNOME.....

Fisica Matematica, Parte I, Appello del 2/02/2011, A.A. 2010/2011 CIVILI

In un piano verticale π, un sistema formato da una lamina omogenea di massa M con un profilo semicircolare AB di raggio R e un disco omogeneo di massa m e raggio r e' vincolato nel modo seguente: la lamina scorre, senza attrito sull'asse x di π e il disco rotola senza strisciare sul profilo, (cfr figura). Inizialmente il sistema e' fermo con il disco a contatto con il punto A del profilo semicircolare.
Assunte come coordinate lagrangiane l'ascissa x del centro C del profilo semicircolare e l'angolo θ che la verticale forma con CG (G centro del disco), si chiede:

1) Scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange del moto.
2) Dedurre dalla lagrangiana l'esistenza di due integrali primi e darne il significato fisico in base all'analisi delle forze in gioco.
3) Usando gli integrali primi calcolare la velocita' del centro del disco quando esso raggiunge la minima quota, (porre $M = 2m$ e $R = 3r$).
4) Calcolare la reazione vincolare agente sulla lamina nell'istante iniziale.

1. Si risponda ai punti precedenti spiegando, in modo conciso, il ragionamento seguito e i teoremi applicati, verificando che le ipotesi di tali teoremi sono soddisfatte per il sistema in esame.

SOLUZIONE

Per il moto di puro rotolamento la velocita' angolare del disco e': $\underline{\omega} = -\frac{(R-r)}{r}\dot{\theta}\ \mathbf{k}$ essendo $\mathbf{k}$ il versore dell'asse ortogonale al piano π e la Lagrangiana del sistema e'

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + m(R-r)\dot{x}\dot{\theta}cos\theta + mg(R-r)cos\theta$$

La coordinata x e' una variabile ciclica, si conserva il corrispondente momento cinetico coniugato

$$M\dot{x} + m(\dot{x} + (R-r)\dot{\theta}cos\theta = p_x$$

che rappresenta la quantita' di moto del sistema lungo l'asse x. Tale quantita' si conserva in quanto la risultante delle forze esterne agenti sul sistema ha componente nulla sull'asse x. Inoltre la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo. Si conserva l'energia generalizzata che coincide con l'energia meccanica poiche' i vincoli sono fissi.

$$\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + m(R-r)\dot{x}\dot{\theta}cos\theta - mg(R-r)cos\theta = E$$

Imponendo le condizioni iniziali ne segue che $p_x = 0,\ E = 0$ e utilizzando gli integrali primi si calcola la velocita' del centro del disco quando $\theta = 0$.

$$\mathbf{v}_G = \frac{4}{3}r\sqrt{\frac{6g}{7r}}\ \mathbf{i}, \qquad (R = 2r,\ M = 3m)$$

Applicando la prima equazione cardinale all'intero sistema calcolata nell'istante iniziale si ha

$$R_y^v = (M+m)g - m(R-r)\ddot{\theta}(t_0) = \frac{1}{3}mg + Mg$$

calcolando $\ddot{\theta}(t_0)$ dalle equazioni di moto.