NOME.....COGNOME.....

Fisica Matematica, Parte I, Appello del 7/07/2011

In un piano **orizzontale** π, un disco omogeneo di massa M e raggio R e' vincolato a ruotare senza attrito attorno all'asse Oz ortogonale al piano π e passante per il suo centro O.
Sia O l'origine di un sistema di assi cartesiani $(O\ x, y)$ nel piano π.
Un punto materiale P di massa m e' vincolato senza attrito a scorrere sul bordo del disco. Tra il punto P e il punto A del bordo del disco agisce una forza elastica di costante $k > 0$, (cfr fig). Inoltre sul disco agisce una coppia di momento $\mathbf{M} = -\alpha cos\theta \mathbf{k}$, essendo α una costante positiva, $\mathbf{k}$ il versore dell'asse z e θ l'angolo che l'asse Ox forma con OA. Assunte come coordinate lagrangiane l'angolo θ e l'angolo ϕ che l'asse Ox forma con OP, si chiede:
1) Calcolare le posizioni di equilibrio del sistema e determinarne il carattere.

Usando le equazioni cardinali e l'equazione di Newton :
2) Scrivere le equazioni di moto del sistema.
3) Calcolare le reazioni vincolari agenti sul punto e sul disco nel generico istante di moto.

SOLUZIONE

$$V = 1/2k(2R^2 - 2R^2 cos(\phi - \theta)) + \alpha sen\theta$$

le posizioni di equilibrio sono le soluzioni di

$$V_\phi = kR^2 sen(\phi - \theta) = 0, \quad V_\theta = -kR^2 sen(\phi - \theta) + \alpha cos\theta = 0$$

cioe': $P_1(\theta = \pi/2, \phi = \pi/2), P_2(\theta = \pi/2, \phi = 3\pi/2), P_3(\theta = 3\pi/2, \phi = 3\pi/2), P_4(\theta = 3\pi/2, \phi = 5\pi/2)$

Sudiando i minori della matrice Hessiana si ha che

P_1 e P_4 sono punti sella e quindi instabili, P_2 e' un punto di massimo e quindi instabile, P_3 e' un punto di minimo e qundi stabile.

Proiettando l'equazione di Newton per il punto P sulla tangente, normale e binormale si ottiene l'equazione di moto e la reazione vincolare agente sul punto:

$$mR\ddot{\phi} = -kRsen(\phi - \theta) \quad \Phi_n = mR\dot{\phi}^2 - kR(1 - cos(\phi - \theta)), \quad \Phi_z = mg$$

Dalla seconda equazione cardinale per il solo disco con polo in $O = G$ si ottiene la seconda equazione di moto:

$$1/2MR^2\ddot{\theta} = kR^2 sen(\phi - \theta) - \alpha cos\theta$$

mentre dalla 1 equazione cardinale per l'intero sistema si ottiene il risultante delle reazioni vincolari nel punto O agenti sul disco:

$$M\mathbf{a}_G + m\mathbf{a}_P = (M + m)\mathbf{g} + \mathbf{R}^v$$

che va proiettata sui tre assi cartesiani.