NOME.....COGNOME.....Anno di Corso.....

Fisica Matematica, Appello del 9/01/2014, A.A. 2013/2014 CIVILI

Esercizio 1. In un piano verticale π, un disco omogeneo di massa M e raggio R e' vincolato a ruotare attorno all'asse Oy perpendicolare al piano dove O e' un punto del disco distante $R/2$ dal suo centro C. Un punto P di massa m e' vincolato senza attrito a scorrere lungo l'asse orizzontale Ox del piano. I vincoli sono lisci. Tra il punto P e il centro C del disco agisce una forza elastica di costante $k > 0$
Assunte come coordinate lagrangiane l'ascissa x del punto P e l'angolo θ che l'asse verticale forma con OC, si chiede:

1) Calcolare le posizioni di equilibrio del sistema e determinarne il carattere.
2) Scrivere la Lagrangiana dei piccoli moti attorno ad una posizione di equilibrio stabile, le equazioni dei piccoli moti e, nel caso in cui e' $M = m$ e $Mg = 3/2kR$, determinarne le frequenze.

FACOLTATIVO
3) Calcolare la reazione vincolare agente sul disco nel generico istante di moto

1. Si risponda ai punti precedenti spiegando, in modo conciso, il ragionamento seguito e i teoremi applicati, verificando che le ipotesi di tali teoremi sono soddisfatte per il sistema in esame.
2. **Si ricorda di portare alla prova orale le ricevute attestanti il superamento degli esami propedeutici.**

SOLUZIONE

1. L'energia potenziale e' data da

$$V(x,\theta) = -Mg\frac{R}{2}\ cos\theta + \frac{1}{2}k\ (x^2 - Rxsen\theta)$$

e le posizioni di equilibrio sono

$$E_1(x=0,\theta=0),\ E_2(x=0,\theta=\pi),\ E_3(x=\frac{R}{2}\sqrt{1-\lambda^2},\theta=arccos\lambda),\ E_4(x=-x_3,\theta=2\pi-\theta_3)$$

$E_3,\ E_4$ esistono solo se $\lambda = \frac{2Mg}{kR} < 1$. E_1 e' stabile se $\lambda > 1$ cioe' se non esistono E_3 ed E_4, E_2 e' sempre instabile e $E_3,\ E_4$ sono stabili quando esistono.

2. L'energia cinetica del sistema e' data da

$$T = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad I_O = \frac{3}{4}MR^2$$

e la Lagrangiana dei piccoli moti attorno alla posizione di equilibrio E_1, stabile per $\frac{2Mg}{kR} > 1$, e' data

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}(\frac{MR^2}{4}\dot{\theta}^2 + m\dot{x}^2) - \frac{1}{2}(kx^2 - kRx\theta + \frac{MgR}{2}\theta^2)$$

Le equazioni dei piccoli moti sono

$$m\ddot{x} + kx - \frac{kR}{2}\theta = 0, \quad \frac{3}{4}MR^2\ddot{\theta} + \frac{MgR}{2}\theta - \frac{kR}{2}x = 0$$

e, nel caso in cui e' $M = m$ e $Mg = 3/2kR$, le soluzioni di $det(V - \lambda T) = 0$ sono

$$\lambda_1 = (1 - \frac{\sqrt{3}}{3})\frac{k}{m}, \quad \lambda_2 = (1 + \frac{\sqrt{3}}{3})\frac{k}{m}$$

3. La 1 equazione cardinale scritta per il solo disco

$$M\underline{a}_C = M\underline{g} - kPG + \underline{R}^v$$

proiettata sulla tangente e la normale all'orbita descritta dal centro C del disco, fornisce le componenti tangente e normale della reazione vincolare

$$R_t^v = \frac{MR}{2}\ddot{\theta} + Mgsen\theta - kxcos\theta, \quad R_n^v = \frac{MR}{2}\dot{\theta}^2 + Mgcos\theta - kxsen\theta - \frac{kR}{2}$$