NOME.....COGNOME.....

Fisica Matematica, Parte I, Appello del 2/07/2012, A.A. 2011/12 CIVILI

Sia (Ox, y) un riferimento cartesiano in un piano verticale π. Un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza l ha l'estremo A vincolato a muoversi senza attrito sull'asse Ox di π. Sul punto A agisce una forza elastica $-kOA$, $k > 0$, mentre sull'estremo B agisce la forza elastica $-kB^*B$, essendo B^* la proiezione di B sull'asse verticale Oy.
Assunte come coordinate lagrangiane l'ascissa x di A e l'angolo θ che l'asse x forma con AB, si chiede:

1) Calcolare le posizioni di equilibrio del sistema e determinarne il carattere.
2) Individuare una terna principale di inerzia per la sbarra e calcolare i momenti di inerzia. Scrivere l'espressione del momento risultante delle quantita' di moto con polo in A e calcolarlo
3) Scrivere le equazioni delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile e calcolare le frequenze.

Soluzione:
1.

$$V(x,\theta) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k(x + lcos\theta)^2 + mg\frac{l}{2}sen\theta$$

Le posizioni di equilibrio sono $P_1 = (x = 0,\ \theta = \pi/2)$, $P_2 = (x = 0,\ \theta = 3\pi/2)$, e se $\frac{mg}{kl} < 1$,
$P_3 = (x = \frac{l}{2}\sqrt{1 - (\frac{mg}{kl})^2},\ \theta = arcsen\frac{mg}{kl})$, $P_4 = (x = -\frac{l}{2}\sqrt{1 - (\frac{mg}{kl})^2},\ \theta = \pi - arcsen\frac{mg}{kl})$.
P_1 e' stabile se esistono P_3, P_4 altrimenti e' instabile, P_2 e' sempre stabile e P_3, P_4 sono instabili quando esistono.
2. Una terna principale d'inerzia ha origine in A e assi ξ, η, ζ tali che: ξ diretto come l'asta AB, η ortogonale a ξ nel piano dell'asta e ζ ortogonale al piano ξ, η. $A = 0, B = C = ml^2/3$.

$$\underline{J}_A = mAG \wedge \underline{v}_A + \underline{J}_A^{rot} = (-m\frac{l}{2}\dot{x}sen\theta + m\frac{l^2}{3}\dot{\theta})\underline{k}$$

3. La lagrangiana delle piccole oscillazioni attorno a P_2 e'

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + \frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}) - \frac{1}{2}(2kx^2 + (kl^2 + mgl/2)(\theta - 3\pi/2)^2 + 2klx(\theta - 3\pi/2))$$

e le equazioni dei piccoli moti sono

$$m\ddot{x} + \frac{ml}{2}\ddot{\theta} + 2kx + kl(\theta - 3\pi/2) = 0, \quad \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + \frac{ml}{2}\ddot{x} + (kl^2 + mgl/2)(\theta - 3\pi/2) + klx = 0$$

e le soluzioni di

$$det(V - \lambda T) = 0$$

sono $\lambda_1 = \frac{2k}{m}$, $\lambda_2 = 6(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m})$