NOME.....COGNOME.....MATRICOLA.....ANNO DI CORSO....

Fisica Matematica, Appello del 9/1/2014, A.A. 2013/14 CIVILI

Esercizio 2. Dato il sistema

$$\dot{x} = y \qquad \dot{y} = x^2 - \alpha x - \beta y, \quad \alpha \neq 0, \quad \beta \geq 0$$

a) Studiare, al variare dei parametri le posizioni di equilibrio e il loro carattere utilizzando i metodi di Liapunov.

b) Tracciare il grafico della biforcazione, riconoscendone il tipo.

c) Nel caso in cui e' $\beta = 0$, studiare le orbite nel piano delle fasi al variare di α. In particolare dire per quali valori delle condizioni iniziali iniziale si hanno orbite omocline.

Soluzione:

Le posizioni di equilibrio sono $E_1 = (x = 0, y = 0)$, $E_2(x = \alpha, y = 0)$.
La traccia e il determinante dello Jacobiano calcolato in $(0, 0)$ sono: $TrA = -\beta$, $detA = \alpha$.
Ne segue che per $\beta > 0$, $\alpha > 0$, E_1 e' asintoticamente stabile, per $\beta \geq 0$, $\alpha < 0$, E_1 e' instabile e per $\beta = 0, \alpha > 0$, il primo metodo di Liapunov non da informazioni.

La traccia e il determinante dello Jacobiano calcolato in $(\alpha, 0)$ sono: $TrA = -\beta$, $detA = -\alpha$.
Ne segue che per $\beta > 0$, $\alpha < 0$, E_2 e' asintoticamente stabile, per $\beta \geq 0$, $\alpha > 0$, E_1 e' instabile e per $\beta = 0, \alpha < 0$, il primo metodo di Liapunov non da informazioni.
Per $\beta = 0$ si applica il secondo metodo prendendo come funzione di Liapunov l'energia $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$, con

$$V(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \alpha\frac{x^2}{2} + c$$

Studiando il grafico di $V(x)$ si vede che nel caso in cui e' $\alpha > 0$ in $x = 0$ si ha un minimo. Inoltre $E(0, 0) = 0$ (con $c = 0$) e per il teorema di Dirichlet-Lagrange E_1 e' stabile.
Si hanno orbite omocline per $E = \alpha^3/6$ e $x_0 \in [x_1, \alpha)$ dove $x_1 : V(x) = \alpha^3/6$.

Per $\alpha < 0$ nel punto E_2 si ha un minimo, $E(\alpha, 0) = 0$ con $c = -\alpha^3/6$ e quindi stabilita'. Si hanno orbite omocline per $E = -\alpha^3/6$ e $x_0 \in [x_1, 0)$ dove $x_1 : V(x) = -\alpha^3/6$.