NOME.....COGNOME.....MATRICOLA.....ANNO DI CORSO....

Fisica Matematica , Appello del 4/6/2013, A.A. 2012/13 CIVILI

Esercizio 1. Dato il sistema dinamico

$$\dot{x} = -\alpha x - x^3 + xy^2 \qquad \dot{y} = -y(1+x^2), \quad \alpha \in R$$

Studiare, al variare di α, le posizioni di equilibrio, la stabilita' e tracciare il grafico della biforcazione.

Esercizio 2. Calcolare gli autovalori e le autofunzioni del seguente problema

$$y"(x) - y'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad x \in (0,l),$$
$$y(0) = y(l) = 0$$

e il prodotto scalare rispetto al quale le autofunzioni sono ortonormali.

Soluzione:
1) I punti di equilibrio sono $P_1 = (x=0, y=0), P_{2,3} = (x = \sqrt{-\alpha}, y = 0)$. Questi ultimi esistono solo per $\alpha < 0$.
La traccia e il determinante dello Jacobiano calcolato in P_1 sono: $TrA = -1-\alpha,\ detA = \alpha$. Ne segue che se $\alpha > 0$, P_1 e' asintoticamente stabile, se $\alpha < 0$, P_1 e' instabile e se se $\alpha = 0$, il primo metodo di Liapunov non da informazioni sulla stabilita' di P_1.
Per $\alpha = 0$ si applica il secondo metodo prendendo come funzione di Liapunov $W(x,y) = x^2 + y^2$, (non esistono integrali primi). Si ha che lungo le soluzioni del sistema

$$\dot{W} = -2(x^4 + y^2)$$

ne segue che P_1 e' asintoticamente stabile anche per $\alpha = 0$.
La traccia e il determinante dello Jacobiano calcolato in $P_{2,3}$ sono: $TrA = 3\alpha - 1,\ detA = 2\alpha(\alpha-1)$. Poiche' $\alpha < 0$, ne segue che $P_{2,3}$ sono asintoticamente stabili. La biforcazione si ha per $\alpha = 0$.

2) Si hanno soluzioni non banali solo per $1 - 4\lambda < 0$. In questo caso la soluzione e' data da

$$y(x) = e^{x/2}(c_1 cos(\frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2}x) + c_2 sen(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}x))$$

Imponendo le condizioni al bordo si ha che $\lambda_n = \frac{1}{4} + \frac{(n\pi)^2}{l^2}$ e $y_n(x) = e^{x/2} sen \frac{n\pi}{l} x,\ n \geq 1$.

Le autofunzioni sono ortogonali in $\mathrm{L}^2(0,l)$ con il prodotto scalare pesato con $p(x) = e^{-x}$