Fisica Matematica, Appello del 4/07/2014, A.A. 2013/2014 CIVILI

Esercizio 1. In un piano verticale π un disco omogeneo di massa M e raggio r rotola senza strisciare su una circonferenza fissa del piano di centro l'origine e raggio R. Un punto P di massa m e' vincolato senza attrito a scorrere sull'asse orizzontale Ox del piano. Tra il baricentro G del disco e il punto P agisce una forza elastica di costante k > 0. Assunte come coordinate lagrangiane l'ascissa x di P e l'angolo θ che la direzione fissa Ox forma con OG, si chiede

- 1) Calcolare le posizioni di equilibrio e studiarne il carattere al variare dei parametri
- 2) Scrivere l'energia cinetica del sistema
- 3) Calcolare la componente tangente e normale (all'orbita del baricentro del disco) della reazione vincolare agente sul disco nel generico istante di moto.

SOLUZIONE:

L'energia potenziale e' data da

$$V(x,\theta) = Mg(R+r)sen\theta + \frac{1}{2}k(x^2 - 2x(R+r)cos\theta)$$

e le posizioni di equilibrio sono le seguenti

$$P_1(x=0,\theta=\frac{\pi}{2}),\ P_2(x=0,\theta=\frac{3\pi}{2}), P_3=(x=(R+r)\sqrt{1-\lambda^2},\theta=arcsen(-\lambda),\ P_4=(x_4=-x_3,\theta_4=\pi-\theta_3))$$

Queste ultime due posizioni di equilibrio esistono solo se $\lambda = \frac{Mg}{k(R+r)} < 1$.

Il determinante della matrice Hessiana e' dato da

$$H(x,\theta) = k(k(R+r)x\cos\theta - Mg(R+r)\cos\theta) - (k(R+r)\sin\theta)^{2}$$

Ne segue che P_1 e' instabile e P_2 stabile se $\frac{Mg}{k(R+r)} > 1$, P_3, P_4 sono stabili quando esistono.

L'energia cinetica e' data da

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}\omega^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{3M}{2}(R+r)^2\dot{\theta}^2$$

essendo $\omega = -\frac{R+r}{r}\dot{\theta}$ e $v_G^2 = (R+r)^2\dot{\theta}^2$

Dalla prima equazione cardinale per il solo disco si ricavano le componenti tangenti e normali della reazione agente sul disco

$$M(R+r)\ddot{\theta} = -Mgcos\theta - kxsen\theta + \Phi_t, \quad M(R+r)\dot{\theta}^2 = Mgsen\theta - k(-(R+r) + xcos\theta) + \Phi_n$$