NOME.....COGNOME.....MATRICOLA.....ANNO di CORSO

Fisica Matematica, Parte I, Appello del 06/06/2012, A.A. 2011/12 CIVILI

In un piano **orizzontale** π, un sistema formato da un disco omogeneo di massa m e raggio R e da una sbarra omogenea CA di massa m e lunghezza $l = 4R$ e' cosi' vincolato: il disco rotola senza strisciare sull'asse orizzontale Ox di π e la sbarra CA ha l'estremo C incernierato, senza attrito, nel centro C del disco. Tra l'estremo A della sbarra e il punto O, origine degli assi, agisce una forza elastica di costante $k > 0$ e tra il centro C del disco e il punto O agisce un'altra forza elastica con la stessa costante k.
Assunte come coordinate lagrangiane l'ascissa x del centro del disco e l'angolo θ che la direzione orizzontale forma con CA si chiede:

1. Determinare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilita'

2. Scrivere le equazioni del moto

3. Determinare le componenti della reazione vincolare agente sul disco nell'istante in cui e' $\theta = 0,\ x = 0$ e l'atto di moto e' nullo.

1. Si risponda ai punti precedenti spiegando, in modo conciso, il ragionamento seguito e i teoremi applicati, verificando che le ipotesi di tali teoremi sono soddisfatte per il sistema in esame.
2. Si ricorda di portare alla prova orale le ricevute attestanti il superamento degli esami propedeutici.

Soluzione
1. $V(x,\theta) = 1/2(2x^2 + 8xRcos\theta + 8R^2 sen\theta)$ e le posizioni di equlibrio sono

$P_1 = (x = 0,\ \theta = \pi/2),\ P_2 = (x = 0,\ \theta = 3\pi/2),\ P_3 = (x = -R\sqrt{3},\ \theta = -\pi/6),\ P_4 = (x = R\sqrt{3},\ \theta = 7\pi/6)$

P_1 e P_2 sono instabile e P_3 e P_4 stabili.

2. L'energia cinetica del disco e' data da $T_D = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$ $(\omega_D = -\dot{x}/R)$ e quella della sbarra $T_S = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 4R^2\dot{\theta}^2 - 4R\dot{x}\dot{\theta}sen\theta) + \frac{1}{2}m\frac{16R^2}{12}\dot{\theta}^2$, $L = T - V$ e le equazioni del moto

$$\frac{5}{2}m\ddot{x} - 2mR\ddot{\theta}sen\theta - 2mR\dot{\theta}^2cos\theta + 2k(2Rcos\theta + x) = 0$$

$$\frac{16}{3}mR^2\ddot{\theta} - 2mR\ddot{x}sen\theta + 4kR(Rcos\theta - xsen\theta) = 0$$

3. La reazione vincolare agente sul disco si calcola dalla prima equazione cardinale per l'intero sistema:

$$m\underline{a}_G + m\underline{a}_C = 2m\underline{g} - kOA - kOC + \underline{R}^v$$

che proiettata sugli assi x, y, z e calcolata nell'istante assegnato da:

$$R^v_x = 2m\ddot{x}(\bar{t}) + 4kR, \quad R^v_y = 2mR\ddot{\theta}(\bar{t}) + 2kR, \quad R^v_z = 2mg$$

Dalle equazioni del moto si ricava $\ddot{x}(\bar{t}) = -\frac{8}{5}\frac{kR}{m}$ e $\ddot{\theta}(\bar{t}) = -\frac{3}{4}\frac{k}{m}$

Sostituendo si ha: $R^v_x = \frac{4}{5}kR,\ \ R^v_y = \frac{kR}{2}\ \ R^v_z = 2mg$