NOME.....COGNOME.....MATRICOLA.....

Fisica Matematica, parte II
Appello del 9/02/2010

Esercizio 1. Una particella di massa 1 si muove sull'asse delle x sottoposta ad una forza la cui energia potenziale e'

$$V(x) = x^4 + \alpha x^2, \quad \alpha \in R$$

Si discuta, al variare di α, della presenza di orbite periodiche.

Esercizio 2. Determinare gli autovalori e le autofunzioni del seguente problema di Sturm-Liouville e il prodotto scalare rispetto al quale le autofunzioni sono ortogonali.

$$y''(x) + 2y'(x) + (1+\lambda)y = 0, \quad x \in (0,1)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Determinare inoltre la condizione di compatibilita' per il problema non omogeneo

$$y''(x) + 2y'(x) + (1+\lambda)y = f(x), \quad x \in (0,1)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

SOLUZIONE:

1. Per $\alpha < 0$ le posizioni di equilibrio sono $x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{-\alpha/2}$. La prima e' instabile e $x_{2,3}$ stabili. L'energia potenziale ha una doppia buca. Tutti i moti con condizioni iniziali tali che $-\alpha^2/4 < E < 0$ e $E > 0$ sono periodici.
Per $\alpha \geq 0$ si ha una sola posizione di equlilibrio $x = 0$, stabile. Tutti i moti con condizioni iniziali tali che $E > 0$ sono periodici.

2. Gli autovalori sono $\lambda_n = n\pi$, le autofunzioni sono $y_n = e^{-x} sen(n\pi x), \ n \geq 1$ e il prodotto scalare rispetto al quale le autofunzioni sono ortogonali e': $(y_n, y_m) = 2\int_0^1 dx e^{2x} y_n(x) y_m(x)$

La condizione di compatibilita' per il problema non omogeneo e', tenendo conto delle condizioni al contorno:

$$\int_0^1 dx \ e^{-x} sen(n\pi x) f(x) = 0$$