Analisi Matematica II
09-01-2018

Nome, cognome e matricola:

ESERCIZIO 1

Sia data

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & x \in (-\pi, 0) \\ 0 & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

ripetuta per periodicità in $\mathbb{R}$. Determinare la serie di Fourier.

ESERCIZIO 2 Dato

$$T = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

Calcolare

$$\int\int\int_T xy(z+1)^3 e^y \sin(kx)\, dxdydz$$

al variare di $k \in \mathbb{N}$.

ESERCIZIO 3 Dato

$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0, y \geq 0\}$$

Calcolare

$$\int\int_D \sqrt{(x^2+y^2)^3}dxdy$$

ESERCIZIO 4

a) Data la funzione

$$f(x,y) = x \ln x + y^2$$

classificare gli eventuali punti stazionari.

b) Data la funzione

$$f(x,y) = e^x - 3x + y \ln y$$

classificare gli eventuali punti stazionari.

ESERCIZIO 5 Data la forma differenziale

$$x^4 y dx + xy dy$$

calcolare l'integrale lungo il segmento individuato dai vertici $A = (0, 2)$ $B = (1, 1)$ percorso da $A \to B$.

ESERCIZIO 6 Data la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k,$$

con x numero reale, determinare l'insieme di convergenza e la somma della serie.

Sia data

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & x \in (-\pi, 0) \\ 0 & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

ripetuta per periodicità in $\mathbb{R}$. Determinare la serie di Fourier. **Soluzione:** Avremo

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -x \cos kx \, dx$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -x \sin kx \, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{4}\pi$$

Calcolando l'integrale, si deve tenere conto che $\sin k\pi = 0$ e $\cos k\pi = (-1)^k$. Ponendo uguale a zero la costante additiva

$$\int -\frac{x}{2} \cos kx dx = -\frac{1}{2k^2} \cos kx - \frac{1}{2k} x \sin kx$$

$$\int -\frac{x}{2} \sin kx dx = -\frac{1}{2k^2} \sin kx + \frac{1}{2k} x \cos kx$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -\frac{x}{2} \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \frac{-1 + (-1)^k}{2k^2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -\frac{x}{2} \cos kx = \frac{-1 + (-1)^k}{2\pi k^2}$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -\frac{x}{2} \sin kx = \frac{(-1)^k}{2k}$$

ESERCIZIO 2 Dato

$$T = \{(x, y, z) : 0 \le x \le \pi, \ 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$$

Calcolare

$$\int\int\int_T xy(z+1)^3 e^y \sin(kx) \, dxdydz$$

al variare di $k \in \mathbb{N}$.

$$\int\int\int_T xy(z+1)^3 e^y \sin(kx)dxdydz = \int_0^\pi x\sin(kx)dx \int_0^1 ye^y dy \int_0^1 (z+1)^3 dz$$

$$\int x\sin(kx)dx = \int x\sin kx dx = \frac{1}{k^2}\sin kx - \frac{1}{k}x\cos kx$$

$$\int_0^\pi x\sin(kx)dx = -\frac{\pi(-1)^k}{k}$$

$$\int_0^1 ye^y dy = ye^y - e^y|_0^1 = 1$$

$$\int_0^1 (z+1)^3 dz = \frac{1}{4}(z+1)^4|_0^1 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\int\int\int_T xy(z+1)^3 e^y \sin(kx)\, dxdydz = -\frac{15}{4}\frac{\pi(-1)^k}{k}$$

ESERCIZIO 3 Dato

$$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0, y \ge 0\}$$

Calcolare

$$\int\int_D \sqrt{(x^2+y^2)^3}dxdy$$

$$\int\int_D \sqrt{(x^2+y^2)^3}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 \rho^3\rho = \frac{\pi}{2}\frac{1}{5}2^5 = \frac{16\pi}{5}$$

ESERCIZIO 4

a) Data la funzione

$$f(x,y) = x\ln x + y^2$$

Classificare gli eventuali punti stazionari.

Classificare gli eventuali punti stazionari.

$$f_x(x,y) = 1 + \ln x = 0 \iff x = \frac{1}{e}$$

$$f_y(x,y) = 2y = 0 \iff y = 0$$

$$f_{xx} = \frac{1}{x}\ \ f_{yy} = 2\ \ f_{xy} = 0$$

La matrice hessiana è definita strettamente positiva: deduciamo che il punto è di minimo relativo.

b) Data la funzione

$$f(x,y) = e^x - 3x + y\ln y$$

classificare gli eventuali punti stazionari.

$$f_x(x,y) = e^x - 3 = 0 \iff x = \ln 3$$

$$f_y(x,y) = \ln y + 1 = 0 \iff y = \frac{1}{e}$$

$$(\ln 3, \frac{1}{e})$$

$$f_{xx} = e^x \quad f_{yy} = \frac{1}{y} \quad f_{xy} = 0$$

La matrice hessiana è definita strettamente positiva: deduciamo che il punto è di minimo relativo.

ESERCIZIO 5 Data la forma differenziale

$$x^4 y dx + xy dy$$

calcolare l'integrale lungo il segmento individuato dai vertici $A = (0, 2)$ $B = (1, 1)$ percorso da $A \to B$

$$x(t) = t; \; y(t) = 2 - t \quad t \in [0, 1]$$

$$\int_0^1 (t^4(2-t) - t(2-t))dt =$$

$$\int_0^1 (t^4(2-t) - t(2-t))dt = \int_0^1 (2t^4 - t^5 - 2t + t^2)dt = \frac{2}{5} + \frac{1}{6} - 1 =$$

$$-\frac{13}{30}$$

ESERCIZIO 6 Data la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k$$

determinare l'insieme di convergenza e la somma della serie.

$$(-1, 1)$$

$$S = -\frac{x}{1+x}$$