Appello del 17.2.2012: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1 **[2+2+1 punti]**

Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(i) Definire la successione delle ridotte N-sime.

(ii) Dare la definizione di convergenza assoluta della serie.

(iii) Fare un esempio di serie convergente, ma non assolutamente convergente

Risposta

La successione delle ridotte N-sime è cosi' definita

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

Definizione di convergenza assoluta della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se converge $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$
Esempio di serie convergente, ma non assolutamente convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Domanda 2 **[3+2 punti]**

(i) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

(ii) Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2)dt}{x^3}$$

.

Risposta

Se f è una funzione continua in un intervallo $[a, b]$, allora la sua funzione integrale $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ data da

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

è derivabile in (a, b) e vale $F'(x) = f(x)$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 1 **[2 +2+2+2 punti]**

Data la funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{|x^2 - x - 6|}$$

determinare

(i) insieme di definizione e eventuali asintoti,

(ii) la derivata prima,

(iii) studiare la monotonia.

(iv) tracciare un grafico qualitativo.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè il modulo di annulla se e solo se si annulla il suo argomento,

$$x^2 - x - 6 = 0 \iff x = 3 \,\text{e}\, x = -2,$$

dunque $I = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$.
Le rette $x = -2$, $x = 3$ sono asintoti verticali per la funzione

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x-1}{|x^2-x-6|} = \lim_{x\to -2^+} \frac{x-1}{|x^2-x-6|} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x-1}{|x^2-x-6|} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x-1}{|x^2-x-6|} = +\infty$$

Risulta $y = 0$ asintoto orizzontale per la funzione:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{|x^2-x-6|} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{|x^2-x-6|} = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-x-6} & x > 3 \\ \frac{1-x}{x^2-x-6} & -2 < x < 3 \\ \frac{x-1}{x^2-x-6} & x < -2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{x^2-2x+7}{(x^2-x-6)^2} & x > 3 \\ \frac{x^2-2x+7}{(x^2-x-6)^2} & -2 < x < 3 \\ -\frac{x^2-2x+7}{(x^2-x-6)^2} & x < -2 \end{cases}$$

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & x > 3 \\ > 0 & -2 < x < 3 \\ < 0 & x < -2 \end{cases}$$

f è decrescente per $x < -2$, f è crescente per $-2 < x < 3$, f è decrescente per $x > 3$.

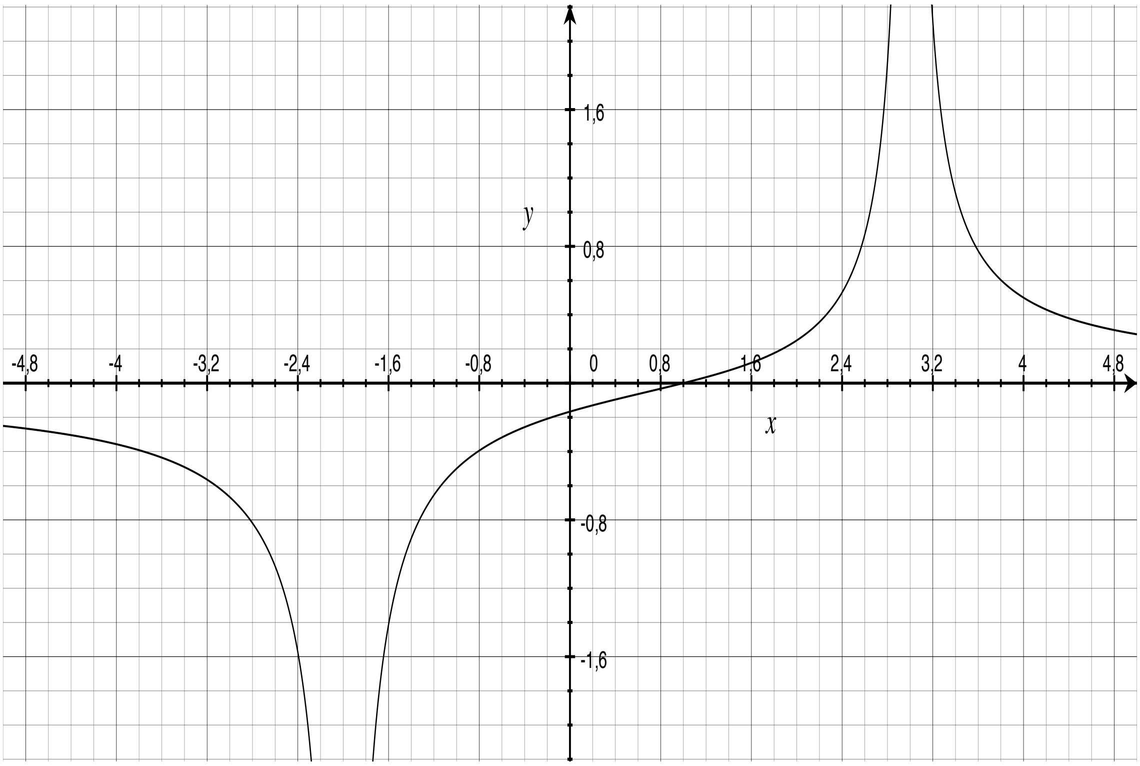

Figura 1: Grafico di $f(x) = \frac{x-1}{|x^2-x-6|}$

Esercizio 2 **[3 punti]**

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continua allora

- $\boxed{\text{a}}$ f è superiormente limitata
- $\boxed{\text{b}}$ $f^2(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\boxed{\text{c}}$ $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che $f(c) = 0$
- $\boxed{\text{d}}$ $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq M \quad \forall x \in [-5, -1]$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua può essere superiormente illimitata ($f(x) = x$). Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua può essere nulla in uno o più punti ($f(x) = x^2$). Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua può essere sempre positiva ($f(x) = x^2 + 1$). Per il teorema di Weierstrass la risposta esatta è d.

Esercizio 3 **[4 punti]**

Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) + y(t) = e^{-t}$ con le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Risoluzione (giustificare la risposta)

La soluzione dell'equazione omogenea associata

$$y''(t) + y(t) = 0,$$

ha come soluzione

$$y_0(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$$

La soluzione particolare la cerchiamo nella forma

$$y_p(t) = Ce^{-t}.$$

Sostituita nell'equazione $y''(t) + y(t) = e^{-t}$, si ottiene $Ce^{-t} + Ce^{-t} = e^{-t}$, ossia $C = \frac{1}{2}$. Allora

$$y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Imponendo le condizioni iniziali

$$y(0) = c_1 + \frac{1}{2} = 0, \iff c_1 = -\frac{1}{2}$$

$$y'(0) = c_2 - \frac{1}{2} = 1, \iff c_2 = \frac{3}{2}.$$

In conclusione

$$y(t) = -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{3}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}e^{-t} = \frac{1}{2}(-\cos(t) + 3\sin(t) + e^{-t}).$$

Esercizio 4 **[3 punti]**

Calcolare

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(t)}{1 - \sin(t)}\, dt$$

Risoluzione

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(t)}{1 - \sin(t)}\, dt = -\ln\big(1 - \sin(t)\big)\Big]_0^{\pi/6} = -\ln(1 - \frac{1}{2}) = \ln 2$$

Esercizio 5 **[3 punti]**

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} e^k$$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} e^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1 - e^{n+1}}{1 - e} =$$

$$\frac{1}{1-e} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{1-e} \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1}}{2^n} = \frac{e}{e-1} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^n = +\infty$$