Esercizio 1 **[3 punti]**

L'integrale

$$\int_0^\pi \sin(\frac{x}{2})\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx, \text{ risulta}$$

$\boxed{\text{a}}$ 0 $\boxed{\text{b}}$ $\sqrt{2}$

$\boxed{\text{c}}$ $1-2\sqrt{2}$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

Si deduce dalla formula di duplicazione

$$\sin(\frac{x}{2}) = 2\sin(\frac{x}{4})\cos\left(\frac{x}{4}\right),$$

pertanto l'integrale

$$\int_0^\pi \sin(\frac{x}{2})\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx = 2\int_0^\pi \sin(\frac{x}{4})\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)dx =$$

$$-8\int_0^\pi \cos^2\left(\frac{x}{4}\right)(\cos(\frac{x}{4}))'dx = -\frac{8}{3}\cos^3\left(\frac{x}{4}\right)|_0^\pi = \frac{8}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Esercizio 2 **[3 punti]**

Per $x \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+3}}, \text{ risulta convergente per}$$

$\boxed{\text{a}}$ nessun valore di x $\boxed{\text{b}}$ solo per $-\frac{1}{8} < x < \frac{1}{8}$

$\boxed{\text{c}}$ solo per $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

La serie si può riscrivere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+3}} = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

Risulta convergente per

$$|\frac{x}{2}| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -2 < x < 2$$

Esercizio 3 **[2 punti]**

Scrivere la funzione definendo la funzione al variare degli intervalli derivanti dalla discussione dei moduli

$$f(x) = e^{-|x-1|} + 2e^{-|x-4|}$$

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

In forza di

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$$

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & x \geq 4 \\ -x+4 & x < 4 \end{cases}$$

si ottiene

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + 2e^{x-4} & x < 1 \\ e^{-x+1} + 2e^{x-4} & 1 \leq x < 4 \\ e^{-x+1} + 2e^{-x+4} & x \geq 4 \end{cases}$$

Esercizio 4

[2 punti]

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-|x-1|} + 2e^{-|x-4|} =$$

$\boxed{\text{a}}$ 0 $\boxed{\text{b}}$ e

$\boxed{\text{c}}$ $-\infty$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

Poiché dobbiamo calcolare $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ possiamo assumere $x < 1$.

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-|x-1|} + 2e^{-|x-4|} = \lim_{x\to-\infty} e^{x-1} + 2e^{x-4} = 0$$

$\boxed{\text{a}}$ 0

Esercizio 5

[2 punti]

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-|x-1|} + 2e^{-|x-4|} =$$

$\boxed{\text{a}}$ e $\boxed{\text{b}}$ 0

$\boxed{\text{c}}$ $+\infty$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

. Poiché dobbiamo calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ possiamo assumere $x > 4$.

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-|x-1|} + 2e^{-|x-4|} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x+1} + 2e^{-x+4} = 0$$

Esercizio 6

[6 punti]

Determinari eventuali punti di massimo e minimo relativo e disegnare in $\mathbb{R}$ il grafico della funzione

$$f(x) = e^{-|x-1|} + 2e^{-|x-4|}$$

e rispondere alle domande

$\boxed{\text{Si}}$ $\boxed{\text{No}}$ f é continua in $\mathbb{R}$? $\boxed{\text{Si}}$ $\boxed{\text{No}}$ f é derivabile in $\mathbb{R}$?

Risoluzione <u>(giustificare la risposta)</u>

La funzione è continua in $\mathbb{R}$ perché

$$e^{-3}+2=\lim_{x\to 4^-} e^{-|x-1|}+2e^{-|x-4|}=\lim_{x\to 4^-} e^{-x+1}+2e^{x-4}=\lim_{x\to 4^+} e^{-x+1}+2e^{-x+4}=\lim_{x\to 4^+} e^{-|x-1|}+2e^{-|x-4|}$$

Inoltre

$$1+2e^{-3}=\lim_{x\to 1^-} e^{-|x-1|}+2e^{-|x-4|}=\lim_{x\to 1^-} e^{x-1}+2e^{x-4}=\lim_{x\to 1^+} e^{-x+1}+2e^{x-4}=\lim_{x\to 1^+} e^{-|x-1|}+2e^{-|x-4|}$$

Non è derivabile in $\mathbb{R}$ perché

$$f'(x)=\begin{cases} e^{x-1}+2e^{x-4} & x<1 \\ -e^{-x+1}+2e^{x-4} & 1\le x<4 \\ -e^{-x+1}-2e^{-x+4} & x\ge 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 4^-} -e^{-x+1}+2e^{x-4} \ne \lim_{x\to 4^+} -e^{-x+1}-2e^{-x+4}$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 1^-} e^{x-1}+2e^{x-4} \ne \lim_{x\to 1^+} -e^{-x+1}+2e^{x-4}$$

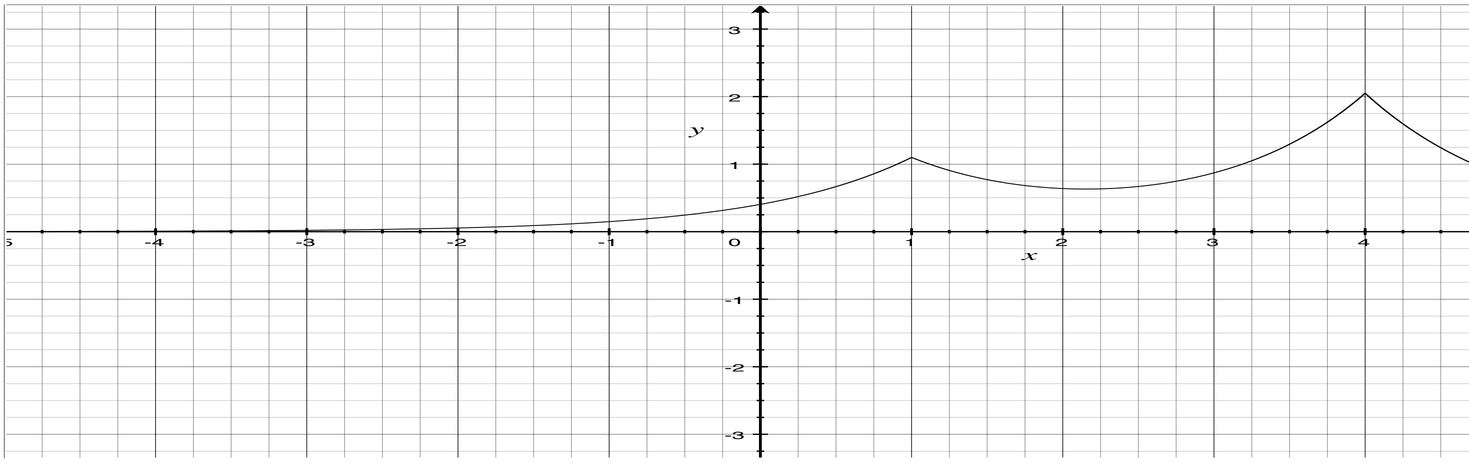

Figura 1: default

Esercizio 7 **[3 punti]**

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4+\tan^4 x}{x^4+\tan(x^4)} =$$

- $\boxed{\text{a}}$ 1
- $\boxed{\text{b}}$ 0
- $\boxed{\text{c}}$ non esiste il limite
- $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Risoluzione <u>(giustificare la risposta)</u>

In forza del limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$$

raccogliendo x^4

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4+\tan^4 x}{x^4+\tan(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{\tan^4 x}{x^4}}{1+\frac{\tan(x^4)}{x^4}} = 1$$

Esercizio 8 **[3 punti]**

L'estremo inferiore dell'insieme

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R},\ x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, \} \right\}, \text{ risulta}$$

$\boxed{\text{a}}$ e $\boxed{\text{b}}$ 2

$\boxed{\text{c}}$ 1 $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

L'estremo inferiore dell'insieme

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R},\ x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, \} \right\}, \text{ risulta}$$

uguale a 2 essendo $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, una successione crescente.

$$2 = \inf X = \min X = x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \cdots \le \sup X = e$$

Esercizio 9 **[3 punti]**

2 é un numero razionale

$\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

ll prodotto di un numero complesso per se stesso é sempre reale

$\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, quindi 2 é un numero razionale. Non è vero che il prodotto di un numero complesso per se stesso é sempre reale. Basta considerare $1 + i$ e farne il quadrato: $(1 + i)^2 = 2i$

Esercizio 10 **[3 punti]**

Scrivere le radici quarte del numero complesso z=8

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dalla formula delle radici quarte

$$w_k = \sqrt[4]{8}(\cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4}), \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

$w_0 = \sqrt[4]{8}$, $w_1 = \sqrt[4]{8}i$, $w_2 = -\sqrt[4]{8}$, $w_3 = -\sqrt[4]{8}i$