Appello del 01.09.2015: Compito A

E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
E7	
E8	
E9	
E10	
Σ	

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

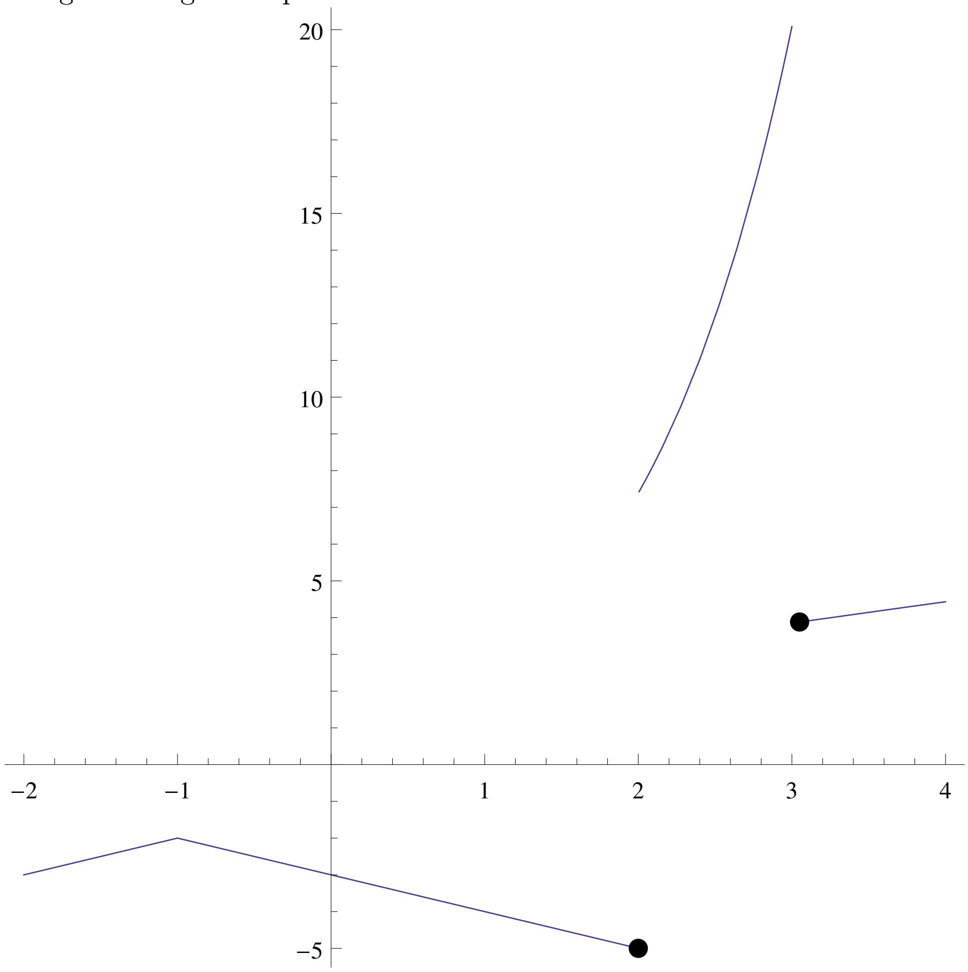
Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x \leq -1 \\ -x - 3 & -1 < x \leq 2 \\ e^x & 2 < x < 3 \\ \ln(x^3 + e^3) & x \geq 3 \end{cases}$$

Esercizio 1

[5 punti]

Disegnare un grafico qualitativo della funzione



Esercizio 2

[2 punti]

Determinare i punti di discontinuità della funzione.

Risposta

$$x = 2, \qquad x = 3$$

Esercizio 3

[2 punti]

Determinare i punti di non derivabilità della funzione.

Risposta

$$x = -1, \qquad x = 2, \qquad x = 3$$

Esercizio 4

[3 punti]

Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt[n]{n}}$$

allora

$\boxed{\text{a}}$ diverge positivamente

$\boxed{\text{b}}$ é indeterminata

$\boxed{\text{c}}$ converge

$\boxed{\text{d}}$ non si può dire nulla

Risposta

La serie diverge positivamente. Infatti si tratta di una serie a termini positivi e quindi convergente o positivamente divergente in cui

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{\sqrt[n]{n}} = \frac{\lim_{n\to+\infty} 2^n}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}} = +\infty$$

Esercizio 5

[3 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right)$$

Risposta

$$\lim_{x\to+\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} 2x \ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{2} \lim_{y\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \frac{1}{2}$$

Esercizio 6

[3 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x \tan x}$$

Risposta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x \tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \sin^2 x}{x \sin x} == \lim_{x\to 0} \cos x \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \cos x \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Esercizio 7

[3 punti]

Calcolare

$$\int \arctan x dx$$

Risposta

Integrando per parti

$$\int \arctan x dx = \int (x)' \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c$$

Esercizio 8 **[3 punti]**

Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \sin(2x) + \cos^2 x$$

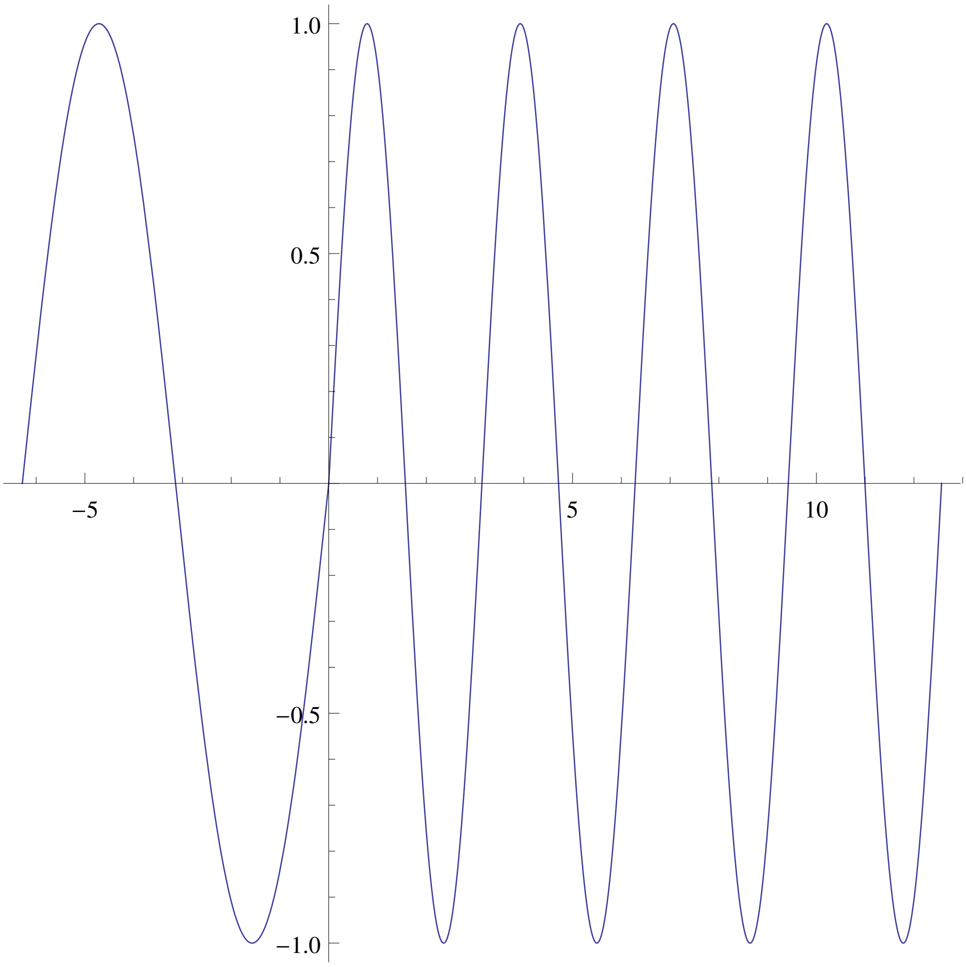
Risposta

$$f'(x) = 2\cos(2x) - \sin(2x)$$

Esercizio 9 **[3 punti]**

Determinare i punti in cui si annulla la funzione disegnare un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq 0 \\ \sin(2x) & x > 0 \end{cases}$$



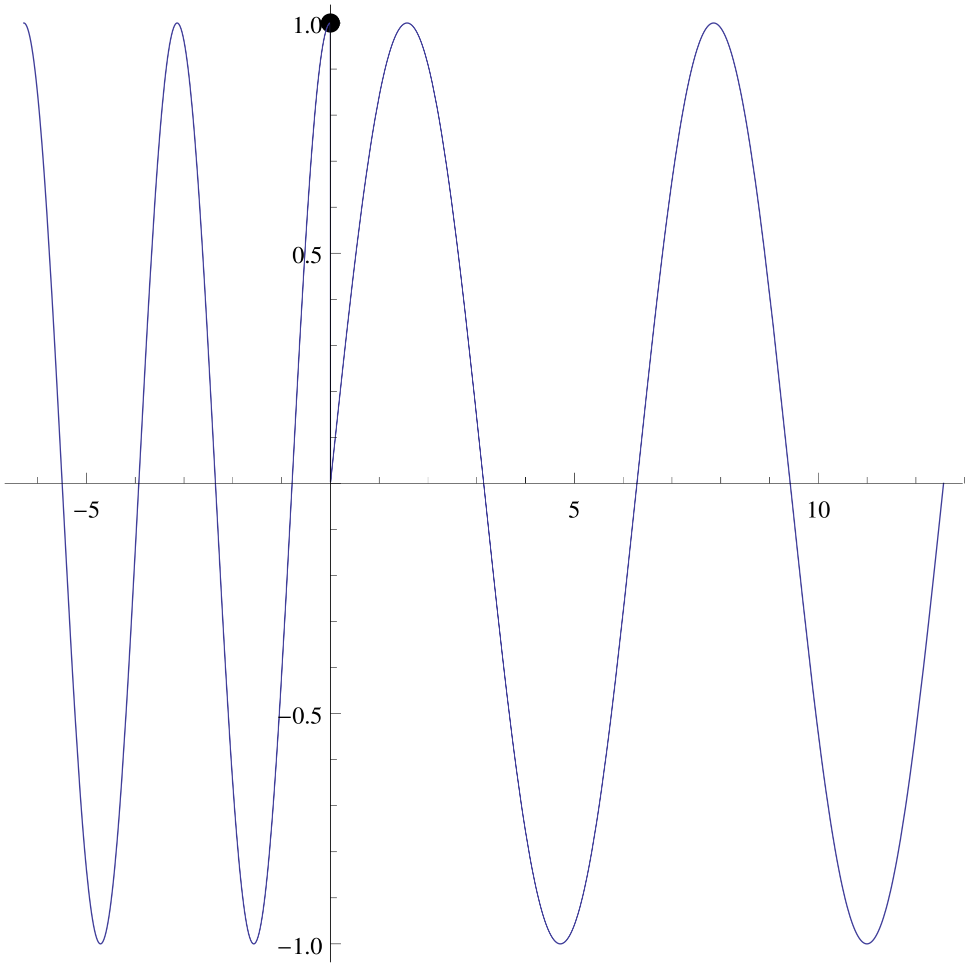
$$x \leq 0 \qquad \sin x = 0 \qquad x = k\pi, \quad k = 0, -1, -2, -3, \ldots$$

$$x > 0 \qquad \sin(2x) = 0 \qquad x = k\frac{\pi}{2}, \quad k = 1, 2, 2, \ldots$$

Esercizio 10 **[3 punti]**

Determinare i punti in cui si annulla la funzione e disegnare un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos(2x) & x \leq 0 \\ \sin(x) & x > 0 \end{cases}$$



$$x \le 0 \qquad \cos 2x = 0 \qquad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad k = -1, -2, -3, \dots$$

$$x > 0 \qquad \sin x = 0 \qquad x = k\pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$