Esame scritto di Analisi Matematica II
08-01-2016

Nome, cognome e matricola: ______________________________

ESERCIZIO 1

Sia data

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & x \in (-\pi, 0) \\ -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

ripetuta per periodicità in $\mathbb{R}$. Determinare la serie di Fourier.

Soluzione: La funzione data è dispari. Pertanto, nello sviluppo in serie di Fourier, gli unici coefficienti non nulli saranno quelli di $\sin kx$. Avremo

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

dove

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

Per calcolare b_k, teniamo conto che, essendo $f(x)$ e $\sin kx$ funzioni dispari, il loro prodotto è una funzione pari. Quindi

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \sin kx \, dx$$

Calcolando l'integrale, in cui si deve tenere conto che $\sin k\pi = 0$ e $\cos k\pi = (-1)^k$, si ottiene

$$b_k = \frac{1}{k}$$

e quindi otteniamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx.$$

ESERCIZIO 2. Classificare gli eventuali punti stazionari della funzione definita in $\mathbb{R}^2$ da

$$f(x,y) = \cos x + \sin y$$

Soluzione:
I punti stazionari della funzione sono dati dal sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\sin x = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{2} + j\pi & j \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Si hanno dunque infiniti punti stazionari, ciascuno di coordinate $(k\pi, \frac{\pi}{2} + j\pi)$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}$. La matrice hessiana in un generico punto (x,y) è

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & -\sin y \end{pmatrix}.$$

Calcolandola in un generico punto stazionario diventa

$$H\big(k\pi, \frac{\pi}{2} + j\pi\big) = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice Hessiana in un generico punto stazionario risulta $(-1)^{j+k}$. Dunque, se k e j sono entrambi pari o entrambi dispari, il determinante risulta pari a 1 e dunque positivo; si tratterà di punti di max o min relativo a seconda del segni di $(-1)^{k+1}$: se k è pari di tratta di un punto di max relativo, se k è dispari si tratta di un minimo relativo. Ripetendo se k e j sono entrambi pari si tratta di un massimo relativo. Se invece k e j sono entrambi dispari si tratta di un minimo relativo. Infine Sse infine k è pari e j è dispari (o viceversa), abbiamo un punto di sella poiché il valore del determinante è -1.

ESERCIZIO 3 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma (x+y)^2 ds$$

dove γ è il segmento di estremi $P_0 = (1,1)$ e $P_1 = (3,2)$.

Soluzione:

Il segmento in questione si puó parametrizzare come

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2t & t \in [0,1] \\ y(t) = 1 + t \end{cases}$$

Dunque, per definizione di integrale curvilineo, si ha

$$\begin{aligned} \int_\gamma (x+y)^2 ds &= \int_0^1 \big(x(t) + y(t)\big)^2 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt \\ &= \int_0^1 (1 + 2t + 1 + t)^2 \sqrt{5}\, dt \\ &= 13\sqrt{5}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 4. La seguente curva è chiusa? E' regolare?

$$\begin{cases} x(t) = te^{-t} & t \in [0,4] \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 - t \end{cases}$$

Soluzione:

Per $t = 0$, otteniamo il punto $(0,0)$, mentre per $t = 4$ otteniamo $(4e^{-4}, 4)$. Poiché le posizioni iniziale e finale non coincidono, la curva non è chiusa.

La curva data è di classe C_1 e il vettore tangente è

$$\begin{cases} x'(t) = e^{-t}(1-t) \\ y'(t) = t - 1 \end{cases}$$

Tuttavia, poichè al tempo $t = 1$ (che è interno all'intervallo $[0,4]$), si ha $\big(x'(1), y'(1)\big) = (0,0)$, deduciamo che la curva non è regolare in $[0,4]$

ESERCIZIO 5. Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$y^2 e^{xy} dx + (e^{xy} + xye^{xy})dy$$

lungo il segmento di estremi $P_0 = (0,0)$ e $P_1 = (1,1)$, orientato da P_0 a P_1.

Soluzione:

Con semplici passaggi, si trova che una primitiva della forma differenziale è

$$f(x,y) = ye^{xy}$$

Dunque la forma differenziale è esatta in $\mathbb{R}^2$. Applicando il teorema di integrazione delle forme esatte, si ottiene

$$\int_\gamma y^2 e^{xy} dx + (e^{xy} + xye^{xy})dy = f(1,1) - f(0,0) = e$$

dove γ è una qualunque curva con punto iniziale P_0 e punto finale P_1 (come é, appunto, il segmento orientato di estremi P_0 e P_1).

ESERCIZIO 6. Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,3)$. Calcolare

$$\int\int_T \frac{y}{1+x^3}\, dxdy$$

Soluzione:

Scriviamo T come dominio normale rispetto all'asse x:

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 3x\}$$

Dunque

$$\int\int_T \frac{y}{1+x^3}\, dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{3x} dy\, \frac{y}{1+x^3} = \frac{3}{2}\ln 2.$$

ESERCIZIO 7. Sia data la corona circolare $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$. Calcolare

$$\int\int_E \frac{1}{5+x^2+y^2}dxdy$$

Soluzione: In coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

il dominio dato è espresso dalle condizioni $1 \leq \rho \leq 3$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Dunque

$$\int\int_E \frac{1}{5+x^2+y^2}dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^3 d\rho\, \frac{\rho}{5+\rho^2} = \pi \ln\frac{7}{3}.$$