ESERCIZIO 21-04-2016
MINIMIZZAZIONE E PENALIZZAZIONE

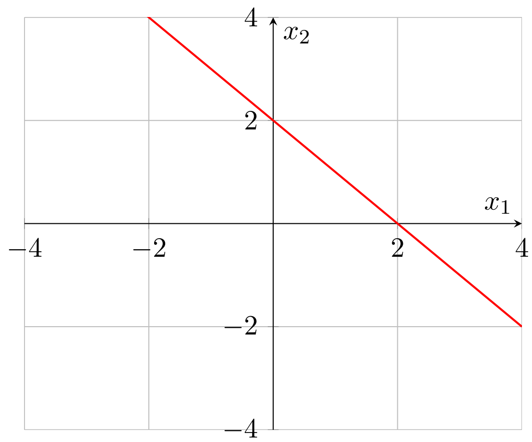
1. Esercizio

Risolvere il seguente problema di minimizzazione vincolata utilizzando la funzione di penalizzazione e verificare il risultato.

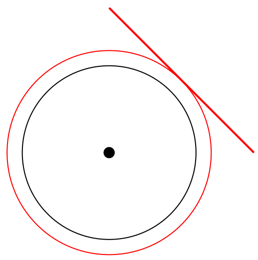
$$\min f(x_1, , x_2) = \|x\|^2 \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$
$$g(x) = x_1 + x_2 - 2 \leq 0$$

$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 2$ rappresenta il vincolo

Grafico di $g(x) = 0$



$g(x) = x_1 + x_2 - 2 = 0$



Calcoliamo $g^+(x_1, x_2) = \max\{g(x_1, x_2), 0\}$

$$g^+(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 - 2 & x > 2 \\ 0 & x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases} \tag{1}$$

Possiamo introdurre la funzione penalizzata

$$f_k(x) = f(x) + k(g^+(x))^2$$

$$f_k(x) = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + k\big(\max((x_1 + x_2 - 2), 0)\big)^2 \\ k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Calcoliamo i punti stazionari

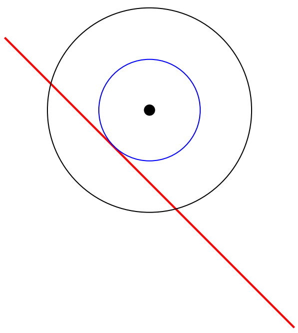
$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{\partial f_k}{\partial x_1} = 2x_1 + \ 2k\big(\max((x_1+x_2-2),0)\big) = 0 \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_2} = 2x_2 + 2k\big(\max((x_1+x_2-2),0)\big) = 0 \end{cases}$$

$$\iff x_2 = x_1 = -k\max((2x_1-2),0) \iff x_1 = x_2 = 0$$
$$k = 1,2,\dots$$

2. Esercizio

Risolvere il seguente problema di minimizzazione vincolata utilizzando la funzione di penalizzazione e verificare il risultato.

$$\min f(x_1,x_2) = ((x_1-1)^2 + (x_2-2))^2$$
$$g(x) = x_1 + x_2 - 2 \leq 0$$



Possiamo introdurre la funzione penalizzata

$$f_k(x) = f(x) + k(g^+(x))^2$$

$$f_k(x) = \begin{cases} (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 + k\big(\max((x_1+x_2-2),0)\big)^2 \\ k = 1,2,\dots \end{cases}$$

Calcoliamo i punti stazionari

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{\partial f_k}{\partial x_1} = 2(x_1-1) + 2k\big(\max((x_1+x_2-2),0)\big) = 0 \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_2} = 2(x_2-2) + 2k\big(\max((x_1+x_2-2),0)\big) = 0 \end{cases}$$

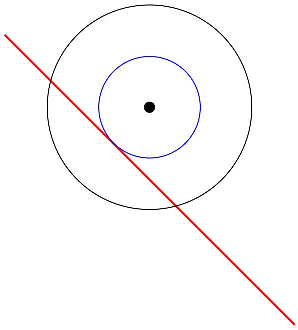
$$\begin{cases} \iff x_2 - 2 = x_1 - 1 = -k\max((2x_1-1),0) \iff \\ \frac{1}{2} < x_1 < 1 \quad x_2 - 2 = x_1 - 1 = -k(2x_1-1)) \\ k = 1,2,\dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{k+1}{k+2} \\ x_2 = \frac{3k+2}{2k+1} \end{cases} \quad k \to +\infty \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

3. Esercizio

Risolvere il seguente problema di minimizzazione vincolata utilizzando la funzione di penalizzazione e verificare il risultato.

$$\min f(x_1, x_2) = ((x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1))^2$$
$$g(x) = x_1 + x_2 - 2 \leq 0$$



Possiamo introdurre la funzione penalizzata

$$f_k(x) = f(x) + k(g^+(x))^2$$

$$f_k(x) = \begin{cases} (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + k\big(\max((x_1 + x_2 - 2), 0)\big)^2 \\ k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Calcoliamo i punti stazionari

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{\partial f_k}{\partial x_1} = 2(x_1 - 1) + 2k\big(\max((x_1 + x_2 - 2), 0)\big) = 0 \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_2} = 2(x_2 - 1) + 2k\big(\max((x_1 + x_2 - 2), 0)\big) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 = -k \max((2x_1 - 2), 0) + 1 \\ k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$