Esercizi del 24 aprile 2017

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

1 Convoluzione inferiore

1.1 Esercizio: caso regolare

Consideriamo il seguente esempio. Sia

$$f(x) = \|x\|^2 .$$

$$f_\epsilon(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^N} \left[\sum_{k=1}^N y_k^2 + \frac{1}{2\epsilon} \sum_{k=1}^N (x_k - y_k)^2 \right]. \tag{1}$$

Per x fissato, denotiamo con

$$F_\epsilon(y) = \sum_{k=1}^N y_k^2 + \frac{1}{2\epsilon} \sum_{k=1}^N (x_k - y_k)^2$$

$$D_{y_j} F_\epsilon = 2y_j - \frac{1}{\epsilon}(x_j - y_j) = 0. \qquad j = 1, \dots, N$$

Quindi

$$y_j = \frac{1}{2\epsilon + 1} x_j,$$

e sostituendo

$$f_\epsilon(x) = \left[\left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{(2\epsilon+1)^2} x_k^2 \right) + \frac{1}{2\epsilon} \sum_{k=1}^N (2\epsilon \frac{1}{2\epsilon+1} x_k)^2 \right].$$

Semplificando

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{2\epsilon+1} \sum_{k=1}^N x_k^2 = \frac{1}{2\epsilon+1} \|x\|^2 .$$

1.2 Esercizio: funzione discontinua

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \le 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

$$f_\epsilon(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}} \left(f(y) + \frac{\|x-y\|^2}{2\epsilon} \right)$$

$$f_\epsilon(x) = \min \left[\inf_{y\le 0} \left(f(y) + \frac{|x-y|^2}{2\epsilon} \right), \inf_{y>0} \left(f(y) + \frac{|x-y|^2}{2\epsilon} \right) \right]$$

$$f_\epsilon(x) = \min \left[\inf_{y\le 0} \left(-1 + \frac{|x-y|^2}{2\epsilon} \right), \inf_{y>0} \left(1 + \frac{|x-y|^2}{2\epsilon} \right) \right]$$

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} -1 & x \le 0 \\ \min \left[\left(-1 + \frac{x^2}{2\epsilon} \right), 1 \right] & x > 0 \end{cases}$$

$$\min \left[\left(-1 + \frac{x^2}{2\epsilon} \right), 1 \right] = -1 + \frac{x^2}{2\epsilon} \quad -1 + \frac{x^2}{2\epsilon} \le 1$$

$$-1 + \frac{x^2}{2\epsilon} \le 1 \iff x^2 \le 4\epsilon \iff |x| \le 2\sqrt{\epsilon}$$

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} -1 & x \le 0 \\ -1 + \frac{x^2}{2\epsilon} & 0 < x \le 2\sqrt{\epsilon} \\ 1 & x > 2\sqrt{\epsilon} \end{cases}$$

2 Esercizio: Condizioni KKT

Si vuole minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2,$$

soggetta ai vincoli

$$x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0$$

$$x_1 + x_2 - 1 \leq 0$$

Scrivere le condizioni KKT e fare i calcoli