Appello del 06.02.2017: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
E7	
Σ	

Esercizio 1

[5 punti]

Data la funzione

$$f(x,y) = e^y - y + (x+2)^3 + \frac{3}{2}x^2$$

Calcolare in $\mathbb{R}^2$ eventuali punti stazionari e stabilirne la natura.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$f_x = 3(x+2)^2 + 3x = 0, \quad f_y = e^y - 1 = 0 \iff x^2 + 5x + 4 = 0 \quad y = 0$$

$$x = \frac{1}{2}(-5 \pm \sqrt{25-16}) = \frac{1}{2}(-5 \pm 3) \iff x_1 = -1, x_2 = -4$$

$x_1 = -1$ è un punto di min locale $x_2 = -4$ è un punto di sella. Infatii

$$f_{xx} = 6(x+2) + 3 = 6x + 15$$

$$f_{yy} = e^y$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 0$$

e il risultato segue dalla discussione sulla matrice Hessiana. Infatti $H(-4,0)$ risulta negativa, mentre $H(-1,0)$ risulta positiva con $f_{xx}(-1,0) > 0$.

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale triplo

$$\int\int\int_D x\ln(z)dxdydz$$

$$D = \{(x,y,z) : 1 \le x \le 2, 1 \le y \le 2, 1 \le z \le 2\}$$

$$\int\int\int_D x\ln(z)dxdydz = \frac{3}{2}(2\ln 2 - 1)$$

Esercizio 3

[5 punti]

Siano α e β numeri reali non nulli. Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$2\alpha y dx + \beta x dy$$

esteso alla curva C ove C è costituita dall'unione di C_1 e C_2, ove C_1 è il segmento orientato da $(0,0)$ a $(2,0)$ e C_2 è data in equazioni parametriche $(2\cos t, \sin t)$ con $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, orientata da $(2,0)$ a $(0,1)$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

L'integrale su C_1 della forma differenziale vale 0, l'integrale su C_2 si ottiene calcolando

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -4\alpha\sin^2 t + 2\beta\cos^2 t dt = (-2\alpha(t - \sin t\cos t) - \beta(t + \sin t \cos t)|_0^{\frac{\pi}{2}} = (-2\alpha + \beta)\frac{\pi}{2}$$

oppure

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -4\alpha\sin^2 t + 2\beta(1-\sin^2 t)dt = (-2\alpha - \beta)(t - \sin t\cos t) + 2\beta t|_0^{\frac{\pi}{2}}] = (-2\alpha + \beta)\frac{\pi}{2}$$

Esercizio 4

[2 punti]

Selezionare la risposta giusta motivando la risposta.
La serie

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$$

risulta la serie di Fourier

$\boxed{\text{a}}$ di una funzione pari $\boxed{\text{b}}$ di una funzione dispari $\boxed{\text{c}}$ nessuna delle precedenti

$\boxed{\text{c}}$ nessuna delle precedenti perché $a_0 \neq 0$ e $b_n \neq 0$ per ogni n.

Esercizio 5

[3 punti]

Selezionare la risposta giusta motivando la risposta.
La forma differenziale

$$(y+x)dx - (y-x)dy \qquad \text{in } \mathbb{R}^2$$

$\boxed{\text{a}}$ non ammette primitiva

$\boxed{\text{b}}$ una sua primitiva è $yx + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$

$\boxed{\text{c}}$ una sua primitiva è $yx - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

La forma differenziale

$$(y+x)dx - (y-x) \qquad \text{in } \mathbb{R}^2$$

risulta chiusa, la forma in $\mathbb{R}^2$ risulta esatta. La primitiva (a meno di costanti additive) è data da

$$f(x,y) = yx + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2},$$

infatti

$$f_x = y + x \qquad f_y = -(y-x) = x - y$$

Esercizio 6

[5 punti]

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+2y^2}$$

$\boxed{\text{a}}$ non esiste $\boxed{\text{b}}$ esiste e vale 1/3

Risoluzione (giustificare la risposta)

Posto $y = mx$ il limite in questione vale

$$\frac{1}{1+2m^2},$$

pertanto il limite non esiste in quanto assume diversi valori al variare del parametro m.

E7

[5 punti]

Calcolare

$$\int\int_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dxdy$$

ove D è il cerchio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x^2+y^2 \leq \pi^2.\}$

Risoluzione **<u>(giustificare la risposta)</u>**

Si effettui il cambiamento di variabili $x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \quad$ con θ che varia tra 0 e2π, e ρ tra 0 e π

$$\int\int_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy = 2\int_0^\pi \frac{\pi\rho}{1+\pi^2\rho^2}d\rho = 2\int_0^\pi \frac{\pi\rho}{1+\pi^2\rho^2}d\rho =$$

posto $t = \pi\rho$

$$2\pi\int_0^{\pi^2} \frac{t}{1+t^2}d\rho = \pi\ln(1+\pi^2)$$