Esame scritto di Analisi Matematica II
09-01-2017

Nome, cognome e matricola:

E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

ESERCIZIO 1 (5 punti)

——— **Soluzione:**

Data

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in (-\pi/2, \pi/2) \\ 0 & \pi/2 \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

ripetuta per periodicità in $\mathbb{R}$. Determinare i coefficienti della serie di Fourier.

La funzione data è dispari. Pertanto, nello sviluppo in serie di Fourier, gli unici coefficienti non nulli saranno quelli di $\sin kx$. Avremo

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

dove

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{k}(kx) \sin(kx)\, dx = \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2} \int_0^{k\pi/2} x \sin(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2} \left(-k\frac{\pi}{2} \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \right) =$$
$$-\frac{1}{k} \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{k^2\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

Calcolando l'integrale si ottiene

$$b_k = \begin{cases} \frac{2}{\pi k^2}(-1)^{(k-1)/2} & k = 1, 3, 5 \dots \\ -\frac{(-1)^{k/2}}{k} & k = 2, 4, 6 \dots \end{cases}$$

ESERCIZIO 2. (4 punti) Calcolare le derivate parziali prime delle seguenti funzioni

$$f(x, y) = \arctan(xy)$$

$$f(x, y) = \ln(3x + 3y)$$

$$f(x, y) = \ln(\sin(x^2 + y^2))$$

$$f(x, y, z) = \cos(x^2 + y^2 + z^2)$$

Svolgimento:

$$f_x = \frac{y}{1+y^2x^2}, \quad f_y = \frac{x}{1+y^2x^2};$$

$$f_x = \frac{1}{x+y}, \quad f_y = \frac{1}{x+y};$$

$$f_x = \frac{2x\cos(x^2+y^2)}{\sin(x^2+y^2)}, \quad f_y = \frac{2y\cos(x^2+y^2)}{\sin(x^2+y^2)};$$

$$f_x = -2x\sin(x^2+y^2+z^2), \quad f_y = -2y\sin(x^2+y^2+z^2), \quad f_z = -2z\sin(x^2+y^2+z^2).$$

ESERCIZIO 3 (5 punti)

Calcolo del baricentro della figura piana

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2 \qquad 0 \le y \le x^2\},$$

e il volume del solido ottenuto per rotazione della figura piana di 2π intorno all'asse x
Svolgimento: indichiamo x_b e y_b le coordinate del baricentro della regione piana A. L'area della regione piana vale:

$$m(A) = \int_A dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{x^2} dy \right) dy = \int_0^2 x^2 \, dx = \frac{8}{3},$$

si ha dunque:

$$x_b = \frac{1}{m(A)} \int_A x \, dxdy = \int_0^2 \left(x \int_0^{x^2} dy \right) dx = \frac{3}{8} \int_0^2 x^3 \, dx = \frac{3}{2},$$

$$y_b = \frac{1}{m(A)} \int_A y \, dxdy = \frac{1}{m(A)} \int_0^2 \left(\int_0^{x^2} ydy \right) dx = \frac{3}{8} \int_0^2 \frac{x^4}{2} \, dx = \frac{6}{5}.$$

Sia V il volume generato dalla rotazione della figura attorno all'asse x. Il volume di tale solido, può essere ottenuto mediante il teorema di Guldino:

$$m(V) = \int_V dxdydz = \pi \int_0^2 x^4 \, dx = \frac{32}{5}\pi.$$

ESERCIZIO 4 (5 punti) Calcolo del volume del solido ottenuto per rotazione di 2π intorno all'asse x della figura piana

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \qquad 0 \le y \le \sqrt{x}\}$$

Svolgimento: indichiamo con V il solido generato, il volume può essere calcolato con la formula di Guldino:

$$m(V) = \pi \int_0^1 x \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

ESERCIZIO 5 (5 punti) Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma (x+z)ds$$

dove γ è la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = t & t \in [0,1] \\ y(t) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)t^2 \\ z(t) = t^3 \end{cases}$$

Svolgimento:

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} = \sqrt{1 + 6t^2 + 9t^4} = |1 + 3t^2| = 1 + 3t^2$$

$$\int_\gamma (x+z)ds = \int_0^1 (t + t^3)(1 + 3t^2)dt = \int_0^1 (t + 4t^3 + 3t^5)dt =$$
$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2$$

ESERCIZIO 6 (6 punti) Calcolare

$$\int\int_D \frac{dxdy}{x(x^2+y^2)}$$

$$D = \{x, y) \in \mathbb{R}^2 1 \leq x \leq \sqrt{3}, 0 \leq y \leq x^2\}$$

Svolgimento:

$$\int\int_D \frac{dxdy}{x(x^2+y^2)} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} \arctan x dx =$$
$$-\frac{1}{x}\arctan x|_1^{\sqrt{3}} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x(1+x^2)}dx = -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x} - \frac{x}{(1+x^2)}dx =$$
$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \ \ln x|_1^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)|_1^{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{3} + \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(4) =$$
$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln(2).$$