Esercizi di prove scritte di Analisi Matematica I con schema di soluzione

Paola Loreti

April 5, 2006

1 ESERCIZI

1. Studiare la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos(n^{\gamma})}{n^{\gamma^2-2\gamma+17}}$$

al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$.

2. Calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} |x-\frac{\pi}{2}| \sin x \; dx.$$

3. Studiare e disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}.$$

4. Determinare e disegnare l'insieme di definizione di

$$f(x,y) = \log(1-x^2-y) - \log(y-x^2).$$

SOLUZIONI

1. La serie è a termini positivi.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos(n^{\gamma})}{n^{\gamma^2-2\gamma+17}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^{16}} < +\infty.$$

Quindi, per il confronto con la serie armonica generalizzata, la serie converge per ogni γ reale.

2. Abbiamo

$$\int_0^{2\pi} |x-\frac{\pi}{2}| \sin x \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-x+\frac{\pi}{2}) \sin x \; dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} (x-\frac{\pi}{2}) \sin x \; dx.$$

Integrando per parti l'integrale contenente $x \sin x$ si ottiene

$$\int_0^{2\pi} |x-\frac{\pi}{2}| \sin x \; dx = -2-\pi.$$

3. Insieme di definizione:

$$D(f) = (\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

La funzione è pari, pertanto basta studiare il comportamento per $x \geq 0$.

Troviamo

$$f(0) = \frac{1}{e},$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0,$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

Calcoliamo la derivata :

$$f'(x) = f(x)\frac{-2x}{(x^2-1)^2}.$$

Poichè f è positiva per ogni x nel suo dominio di definizione, ne segue che f' è positiva per $x < 0$, e f' è negativa per $x > 0$, mentre $f'(0) = 0$.

Allora f è decrescente in $(0, 1)$ e in $(1, \infty)$ mentre f è crescente in $(-1, 0)$ e in $(-\infty, -1)$. Pertanto 0 è un punto di massimo. Dopo avere eseguito i calcoli risulta

$$f''(x) = \frac{f(x)}{(x^2-1)^4}(6x^4 - 2).$$

Pertanto f'' è positiva se $x > 1/\sqrt[4]{3}$ e $x \neq 1$ mentre risulta negativa se $0 \leq x < 1/\sqrt[4]{3}$. Allora f è concava in $(0, 1/\sqrt[4]{3})$, convessa in $(1/\sqrt[4]{3}, 1)$ e in $(1, \infty)$, flessi in $x = \pm 1/\sqrt[4]{3}$.

Segue il grafico.

4. Ricordando che le operazioni sui logaritmi sono possibili quando questi sono definiti, imponiamo

$$1 - x^2 - y > 0,$$
$$y - x^2 > 0.$$

Da cui l'insieme

$$A = \{(x, y) \ : \ x^2 < y < 1 - x^2\}.$$

2 ESERCIZI

1. Studiare la convergenza della serie numerica seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n}.$$

2. Calcolare l'integrale

$$\int_{-3}^{3} |x+2| + |x-1| \; dx.$$

3. Studiare e disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = x^2 e^{-|x|}.$$

4. Determinare l'insieme di definizione di

$$f(x) = \sqrt{\sin x - \cos x}.$$

SOLUZIONI

1. Applichiamo il criterio del rapporto

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{4^{n+1}} \frac{4^n}{(-1)^n n}| = |\frac{(-1)(n+1)}{n} \frac{1}{4}| = \frac{n+1}{n} \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2} < 1$$

per ogni n. La serie è pertanto convergente.

2. Abbiamo

$$\int_{-3}^{-2} (-x-2) + (-x+1) dx = \int_{-3}^{-2} -2x - 1 dx = -x^2 - x|_{-3}^{-2} = 4,$$

$$\int_{-2}^{1} (x+2) + (-x+1) dx = \int_{-2}^{1} 3dx = 3x|_{1}^{-2} = 9,$$

$$\int_{1}^{3} (x+2) + (x-1)) dx = \int_{1}^{3} 2x + 1 dx = x^2 + x|_{1}^{3} = 10.$$

Da cui

$$\int_{-3}^{3} |x+2| + |x-1| dx = 23.$$

3. La funzione è pari ed è definita in $\mathbb{R}$ e ivi continua. Inoltre f è non negativa. Assumiamo $x \geq 0$. Allora abbiamo

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x} = 0$$

e

$$f(0) = 0.$$

Inoltre è derivabile in $\mathbb{R}$. Infatti per $x > 0$ si ha

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}.$$

Da cui

$$f'(0^+) = 0.$$

Inoltre se $x < 0$ si ha

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = x(2+x)e^x.$$

Da cui

$$f'(0^-) = 0.$$

Inoltre f è crescente in (0,2) e per $x > 2$ decrescente, mentre è decrescente in $(-2{,}0)$ e crescente per $x > -2$.

Da cui $x = 0$ è un punto di minimo relativo (che $x = 0$ fosse un minimimo si poteva dedurre anche dal fatto che $f(0) = 0$ e f è sempre non negativa) e $x = 2$, $x = -2$ sono punti di massimo relativo.

Sappiamo $f(0) = 0$ e$f(2) = 4/e^{-2}$.

Per $x > 0$ calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x},$$

mentre per $x < 0$

$$f''(x) = (2 + 4x + x^2)e^{-x}.$$

La funzione risulta derivabile due volte in $x = 0$ e

$$f''(0) = 2,$$

mentre f" è negativa in $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ e positiva in $(-2-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$, negativa in $(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2})$, positiva altrimenti. Quindi f è concava in $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$, $(-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2})$ e convessa altrimenti.

Pertanto abbiamo quattro punti di flesso:

$$x = 2 + \sqrt{2}, \quad x = 2 - \sqrt{2}, \quad x = -2 + \sqrt{2}, \quad x = -2 - \sqrt{2}.$$

Per la f abbiamo

$$f(2 + \sqrt{2}) = (2 + \sqrt{2})^2 e^{-(2+\sqrt{2})}$$

$$f(2 - \sqrt{2}) = (2 - \sqrt{2})^2 e^{-(2-\sqrt{2})}$$

e per simmetria ricaviamo il valore negli altri punti

Si può verificare che non esiste la derivata terza in $x = 0$.

Da cui il grafico della funzione.

4. Disegnamo le funzioni $\sin x$ e $\cos x$. Limitandoci a $[0, 2\pi]$ abbiamo

$$\frac{1}{4}\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi.$$

Da cui

$$\frac{1}{4}\pi + 2K\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi + 2K\pi$$

al variare di $K \in Z$.

3 ESERCIZI

1. Determinare l'estremo inferiore e superiore di

$$\frac{(-1)^n}{2n} + \frac{1}{n}$$

al variare di $n \in \mathbb{N}$

2. Calcolare lo sviluppo di MacLaurin di F fino al secondo ordine, con il resto di Lagrange, ove

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

3. Studiare e disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\log(x+1)}{x+1}.$$

4. Determinare e disegnare l'insieme di definizione di

$$f(x,y) = \log(y - |\sin x|) - \log\log(2 - x^2 - y^2).$$

SOLUZIONI

1. L'estremo inferiore è 0, mentre l'estremo superiore è $\frac{3}{4}$.

2. Applichiamo il teorema fondamentale del calcolo:

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

$$F'(x) = e^{-x^2}.$$

Dopo abbiamo

$$F''(x) = -2xe^{-x^2},$$

$$F'''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2},$$

e calcolato in ψ

$$F'''(\psi) = -2e^{-\psi^2} + 4\psi^2e^{-\psi^2},$$

$$F(x) = x + \frac{1}{3!}(-2e^{-\psi^2} + 4\psi^2e^{-\psi^2})x^3,$$

ove ψ è in $(0,x)$.

3. La funzione è definita per $x > -1$ e ivi continua. Abbiamo

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$$

e

$$f(0) = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Inoltre è derivabile nel suo insieme di definizione e

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}(1 - \log(x+1)).$$

Da cui

$$f'(0) = 0$$

se

$$1 = \log(x+1)$$

e

$$x = e - 1.$$

Abbiamo

$$f''(x) = \frac{1}{(x+1)^3}(2\log(x+1) - 3).$$

Da cui

$$x = e^{\frac{3}{2}} - 1$$

è punto di flesso.

Inoltre f è crescente per in $(-1, e-1)$, decrescente in $(e-1, \infty)$, concava per $(-1, e^{\frac{3}{2}} - 1$, convessa per $x > e^{\frac{3}{2}} - 1$.

Da cui il grafico della funzione.

4. La funzione $\log\log(2 - x^2 - y^2)$ è definita per $2 - x^2 - y^2 > 1$. Quindi

$$x^2 + y^2 < 1.$$

Analogamente per l'altro argomento, da cui l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \ : \ x^2 + y^2 < 1 \text{ e } y > |\sin x|\}.$$

4 ESERCIZI

1. Dimostrare che non esiste il limite della successione di termine generale

$$a_n = \begin{cases} (\frac{n-1}{n+1})^n & \text{se n è pari,} \\ (\frac{n-1}{n})^n & \text{se n è dispari.} \end{cases}$$

2. Studiare la convessità della funzione

$$f(x) = e^x - \frac{3}{2} \sin x$$

in $[0, \frac{\pi}{2}]$ e dimostrare che esiste un punto di minimo interno a tale intervallo.

3. Studiare e disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \log(x^2 - 2|x| - 3).$$

4. Determinare $a \in (-1, 1)$ tale che

$$\int_0^a \frac{dx}{1 - x^2} = \log 2.$$

SOLUZIONI

1. Il termine generale della successione si può anche scrivere

$$a_n = \begin{cases} (\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}})^n & \text{se n è pari} \\ (1 - \frac{1}{n})^n & \text{se n è dispari} \end{cases}$$

Cosicchè se n è pari $a_n \to \frac{1}{e^2}$ mentre se n è dispari $a_n \to \frac{1}{e}$, quindi non ammette limite.

2. La funzione è $C^\infty(\mathbb{R})$, possiamo calcolare la derivata seconda che risulta

$$f'(x) = e^x - \frac{3}{2} \cos x$$

e quindi

$$f''(x) = e^x + \frac{3}{2} \sin x.$$

Essendo f'' sempre positiva nell'intervallo assegnato, la funzione risulta convessa.

Inoltre si ha

$$f'(0) = 1 - \frac{3}{2} < 0,$$

mentre

$$f'(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} > 0,$$

da cui si evince che esiste un punto interno all'intervallo in cui la derivata prima si annulla, essendo la derivata seconda sempre positiva in tale intervallo si ha che il punto è di minimo.

3. Occorre risolvere i problemi

$$x \geq 0, \qquad x^2 - 2x - 3 > 0$$

e

$$x < 0, \qquad x^2 - +2x - 3 > 0.$$

Da cui

$$x \geq 0, \qquad x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) > 0$$

e

$$x < 0, \qquad x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) > 0.$$

Quindi si ha

$$x > 3$$

e

$$x < -3.$$

Insieme di definizione:

$$(-\infty - 3) \cup (3, +\infty).$$

Intersezioni con gli assi nei punti $x = 1 + \sqrt{5}$ e $x = -1 - \sqrt{5}$.

Inoltre abbiamo

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = -\infty,$$

mentre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Inoltre per $x > 3$

$$f'(x) = \frac{2x-2}{x^2 - 2x - 3}$$

è positiva nell'insieme di definizione per $x > 3$, pertanto in tale intervallo la funzione è crescente. Inoltre la derivata seconda

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 + 2x - 3)^2} - \frac{(2x-2)^2}{(x^2 - 2x \ - 3)^2}$$

è negativa, pertanto la funzione è concava.

Analogamente per $x < -3$

$$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2 + 2x - 3}$$

è positiva nell'insieme di definizione, per $x < -3$, pertanto in tale intervallo la funzione è crescente.

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 2x - 3)}{(x^2 + 2x - 3)^2} - \frac{(2x + 2)^2}{(x^2 + 2x - 3)^2}$$

è negativa, pertanto la funzione è concava.

Da cui il grafico

4. Abbiamo

$$\int_0^a \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + a}{1 - a}$$

Da cui

$$\frac{1}{2} \log \frac{1 + a}{1 - a} = \log 2,$$

$$\frac{1 + a}{1 - a} = 4.$$

Quindi

$$a = \frac{3}{5}.$$

5 ESERCIZI

1. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} n\log\big(1+\frac{3}{n}\big),$$

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{10}{1-x}}.$$

2. Studiare e disegnare il grafico della funzione

$$f(x)=\frac{1+\log(x-e)^2}{x-e}.$$

3. Studiare e disegnare l'insieme di definizione e calcolare le derivate parziali di

$$f(x,y)=(x-y)^{\sqrt{2}}.$$

4. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x e^{-t}\sin\sqrt{t}dt}{\sin x}.$$

SOLUZIONI

1. Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} n\log\big(1+\frac{3}{n}\big)=\lim_{n\to\infty}\log\big(1+\frac{3}{n}\big)^n.$$

Il primo limite vale 3.

Calcoliamo il valore del secondo limite.

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{10}{1-x}}=\lim_{x\to 1} e^{\log x^{\frac{10}{1-x}}}$$

Possiamo allora calcolare il limite per $x\to 1$

$$\frac{10}{1-x}\log x$$

Quindi applicando de l'Hopital, il valore del limite è e^{-10}.

2. Insieme di definizione:

$$x\neq e$$

asintoto verticale.

Abbiamo

$$\lim_{x\to e^+}\frac{1+\log(x-e)^2}{x-e}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to e^-}\frac{1+\log(x-e)^2}{x-e}=+\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\log(x-e)^2}{x-e} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1+\log(x-e)^2}{x-e} = 0.$$

Da cui $y = 0$ è un asintoto orizzontale.

Si assuma $x > e$. Calcolando la derivata si ha $x = \sqrt{e} + e$ è un punto di massimo relativo.

Si assuma $x < e$ allora $x = -\sqrt{e} + e$ è un punto di minimo relativo. Si ha un flesso per $x = 2e$ e per $x = 0$.

Da cui il grafico della funzione.

3. Insieme di definizione

$$\{(x,y) \in R^2 : x > y\}.$$

Abbiamo

$$f_x(x,y) = \sqrt{2}(x-y)^{\sqrt{2}-1},$$

$$f_y(x,y) = -\sqrt{2}(x-y)^{\sqrt{2}-1}.$$

4. Il limite è nella forma $\frac{0}{0}$. Applicando de l'Hopital, e utilizzando il teorema fondamentale del calcolo per il numeratore si ha che il limite è 0.

6 ESERCIZI

1. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+2}+8}{5^n}.$$

2. Calcolare l'integrale

$$\int \frac{x}{x^2+x+1} dx.$$

3. Studiare e disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = x^x e^{-x}.$$

4. Determinare le coppie di numeri reali (a, b)per le quali vale

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

SOLUZIONI

1. Risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+2}+8}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+2}}{5^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{5^n} = 4^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}.$$

Applicando la teoria riguardante le serie geometriche si ha

$$4^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} = 4^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} - 4^2 = 64,$$

mentre

$$8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} - 8 = 2.$$

Da cui la somma vale 66.

2. L'integrale si puó scrivere:

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{-1}{x^2+x+1} dx =$$

$$\int \frac{1}{2} \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{-1}{x^2+x+1} dx =$$

$$\frac{1}{2} \log(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + c,$$

tenuto conto che

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

3. La funzione è definita per $x > 0$. Inoltre

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Studiamo la derivata prima.

$$f(x) = e^{x \log x} e^{-x} = e^{x \ln x - x}.$$

Da cui

$$f'(x) = x^x e^{-x} (x \ln x - x)' = x^x e^{-x} (\ln x + 1 - 1).$$

Dunque la derivata prima si annulla per $x = 1$. In tal punto la funzione vale e^{-1}. Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = x^x e^{-x} ((\ln x)^2 + \frac{1}{x}).$$

Pertanto la funzione non presenta flessi e risulta convessa nel suo insieme di definizione. Quindi $x = 1$ risulta essere un punto di minimo.

Da cui il grafico della funzione.

4. La disuguaglianza ha significato se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, oppure se $a \leq 0$ e $b \leq 0$. In quest'ultimo caso è tuttavia falsa. Quadrando e semplicando si ha che la disuguaglianza sussiste per $a \geq 0$ e $b \geq 0$ con $a \neq b$.

7 ESERCIZI

1. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n}.$$

2. Calcolare l'integrale tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ di

$$f(x) = \sqrt{1+\cos x}$$

e lo sviluppo di MacLaurin del 2^0 ordine.

3. Studiare e disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{|x^2-2|-2}.$$

4.Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\cos n|}{n+1},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}.$$

SOLUZIONI

1. La serie è convergente. Infatti

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{2n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{2n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}.$$

Da cui

$$\frac{1}{2n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \leq \frac{1}{(2n)(2n^{\frac{1}{2}})}$$

Segue allora dal criterio del confronto.

2. Utilizzando le formule di bisezione si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}dx = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt = 2\sqrt{2} \sin t_0^{\frac{\pi}{4}} = 2$$

e lo sviluppo di MacLaurin del 1^0 ordine.

Si ha

$$f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{-\sin x}{\sqrt{1+\cos x}},$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\frac{-\cos x\sqrt{1+\cos x} - \frac{1}{2}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+\cos x}}}{1+\cos x},$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}.$$

Da cui

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{2}x + R_1(x).$$

3. Basta studiare la funzione per $x > 0$, essendo una funzione pari. La funzione è definita per $x > 2$. In $x = 2$ vale zero, è sempre crescente e concava.

4. Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\cos n|}{n+1} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}.$$

8 ESERCIZI

1. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^\alpha}$$

al variare di $\alpha \in (-\infty, 1]$ e il comportamento della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}.$$

2. Calcolare gli integrali

$$\int_1^2 \frac{1}{3}(x^x(\log x + 1))dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos^2 x - \sin^2 x| dx.$$

3. Studiare e disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \log(x \log x).$$

4. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^\alpha}$$

al variare di $\alpha \in (-\infty, 1]$, e della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}.$$

SOLUZIONI

1. Se $\alpha \leq 0$ non viene verificata la condizione necessaria pertanto la serie è divergente.

Supponiamo $0 < \alpha \leq 1$, applichiamo il criterio del confronto. Per ogni $n \geq 2$

$$\log n < n$$

da cui

$$\frac{1}{(\log n)^\alpha} > \frac{1}{n^\alpha}.$$

Pertanto, per il criterio del confronto la serie è divergente.

Per l'altra serie si ha la convergenza per il criterio di Leibniz.

2. Calcoliamo il primo integrale. Abbiamo

$$\int_1^2 \frac{1}{3}(x^x(\log x + 1))dx = \frac{2^2 - 1^1}{3} = 1.$$

Calcoliamo il secondo integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos^2 x - \sin^2|dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos 2x|dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \frac{1}{2}.$$

3. La funzione è definita in $I = (1, +\infty)$ e ivi di classe C^∞.

Abbiamo

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty.$$

Poichè f è derivabile in I, si ha per $x > 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x\log x}(\log x + 1)$$

Quindi f è crescente in $(1, +\infty)$ e non ha punti di massimo o minimo in tale intervallo.

Per $x > 1$ calcoliamo la derivata seconda che risulta negativa pertanto la funzione è concava:

$$f''(x) = \frac{1}{(x\log x)^2}\left(\frac{1}{x}x\log x - (1 + \log x)^2\right).$$

Quindi f è concava in I.

Da cui il grafico della funzione

9 ESERCIZI

1. Dopo aver determinato dalla formula ricorrente

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \frac{e}{n+1} \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

l'espressione di a_n, (essendo e il numero di Nepero), studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n.$$

2. Calcolare l' integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(\pi - x)} dx.$$

3. Studiare e disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = |x| \log |x|.$$

(Si richiede di studiare in particolare la regolarità della funzione in $x = 0$).

SOLUZIONI

1. Si ha

$$a_n = \frac{e^n}{n!}.$$

Si può procedere alla dimostrazione utilizzando il principio di induzione. La formula è vera al primo passo e se supponiamo che sia vera per $n - 1$, ossia

$$a_{n-1} = \frac{e^{n-1}}{(n-1)!},$$

si ha

$$a_n = a_{n-1} \frac{e}{n}.$$

Dal passo $n - 1$ si ricava

$$a_n = \frac{e^{n-1}}{(n-1)!} \frac{e}{n} = \frac{e^n}{n!},$$

da cui l'asserto.

Si tratta ora di studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^n}{n!}.$$

È verificata la condizione necessaria per la convergenza

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n!} = 0.$$

La serie è a termini positivi, pertanto la convergenza semplice ed assoluta si equivalgono. Applicando il criterio del rapporto si ha

$$\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{e^n} = \frac{e}{n+1} < 1 \qquad \forall n > 1.$$

Pertanto la serie è assolutamente convergente.

2. Risulta

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(\pi - x)} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} dx =$$

posto

$$y = \frac{\pi}{2} + x,$$

procediamo per sostituzione

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{1}{\sin y} dy = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{1}{2\cos\frac{y}{2}\sin\frac{y}{2}} dy.$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per

$$\frac{1}{\cos^2\frac{y}{2}},$$

troviamo

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{y}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{y}{2}} d(\frac{y}{2}).$$

Da cui otteniamo il calcolo dell'integrale

$$-\ln|\operatorname{tg} z|$$

ove $z = \frac{y}{2}$ calcolato tra $z = \frac{\pi}{4}$ e $z = \frac{\pi}{3}$. Quindi

$$-\ln|\operatorname{tg}(\frac{\pi}{3})| = -\ln\sqrt{3}.$$

3. La funzione è definita in $\mathbb{R} - \{0\}$, continua e pari. Si ha

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Il punto $x = 0$ è una singolarità eliminabile.

Studiamo la funzione per $x > 0$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = x\frac{1}{x} + \log x = 1 + \log x.$$

Abbiamo

$$f'(x) = 0$$

se e solo se

$$x = \frac{1}{e}.$$

Il valore della funzione in $x = \frac{1}{e}$ è dato da $-\frac{1}{e}$.

Inoltre

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

è sempre positiva per x positivo, pertanto la funzione è convessa e il punto $x = \frac{1}{e}$ è un punto di minimo.

La funzione risulta prolungabile con continuità in $x = 0$, mentre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty,$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = +\infty.$$

Pertanto il punto $x = 0$ è un punto di cuspide.

Dalla parità segue il grafico della funzione

10 ESERCIZI

1. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin k}{k^2+k+1}.$$

2. Determinare l'insieme dei numeri reali tali che

$$|\sin x| \cos x + |\cos x| \sin x = 0.$$

3. Studiare e disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = (x^2 + x)e^{-2|x|}.$$

In particolare esaminare la continuità e la derivabilità nel punto $x = 0$.

4. Calcolare

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x - 1|}{\sin^2 x} dx.$$

SOLUZIONI

1. La serie è assolutamente convergente, come segue studiando la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left|\frac{\sin k}{k^2+k+1}\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k+1} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

e dunque semplicemente convergente.

2. Limitiamo dapprima lo studio in $[0, 2\pi]$.

Nel primo quadrante ($0 < x < \frac{\pi}{2}$ il seno e il coseno sono funzioni positive pertanto non vi sono punti che verificano la relazione.

Tale relazione viene verificata nel secondo quadrante (estremi inclusi). Infatti la funzione coseno è negativa, mentre la funzione seno è positiva,

$$|\sin x| \cos x + |\cos x| \sin x = \sin x \cos x - \cos x \sin x = 0.$$

Nel terzo quadrante ($\pi < x < \frac{3\pi}{2}$) il seno e il coseno sono funzioni negative pertanto non vi sono punti che verificano la relazione.

Tale relazione viene verificata nel quarto quadrante (estremi inclusi). Infatti la funzione coseno è positiva, mentre la funzione seno è negativa,

$$|\sin x| \cos x + |\cos x| \sin x = -\sin x \cos x + \cos x \sin x = 0.$$

Dunque in $[0, 2\pi]$ la relazione è verificata per

$$x \in [\frac{\pi}{2}, \pi],$$
$$x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi].$$

Tenuto conto della periodicità

$$x \in [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi] = [\pi(\frac{1}{2} + 2k), (1 + 2k)\pi],$$
$$x \in [\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi] = [(\frac{3}{2} + 2k)\pi, 2(1 + k)\pi].$$

Quindi

$$x \in \cup_{k\in Z}[\pi(\frac{1}{2} + 2k), (1 + 2k)\pi] \cup [(\frac{3}{2} + 2k)\pi, 2(1 + k)\pi]$$

o

$$x \in \cup_{k\in Z}[\pi(\frac{1}{2} + k), (1 + k)\pi].$$

3. La funzione è definita in $\mathbb{R}$, si annulla in $x = 0$, e $x = -1$. Supponiamo $x > 0$. Allora

$$f(x) = (x^2 + x)e^{-2x}.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

La derivata prima della funzione è

$$f'(x) = (2x + 1)e^{-2x} - 2(x^2 + x)e^{-2x},$$
$$f'(x) = (2x + 1 - 2x^2 - 2x)e^{-2x},$$
$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-2x}.$$

Quindi la derivata prima, nell'intervallo considerato, si annulla in $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Dallo studio del segno della derivata segue che la funzione ha in $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ un punto di massimo relativo.

La derivata seconda vale

$$f''(x) = (-4x)e^{-2x} - 2(1 - 2x^2)e^{-2x},$$
$$f''(x) = (4x^2 - 4x - 2)e^{-2x}.$$

La derivata seconda si annulla, nell'intervallo considerato, per

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4}.$$

Per $0 < x < \frac{2+2\sqrt{3}}{4}$ la derivata seconda è negativa, pertanto la funzione è concava, mentre è positiva per $x > \frac{2+2\sqrt{3}}{4}$, pertanto la funzione è convessa in tale intervallo.

Per $x < 0$ si ha
$$f(x) = (x^2 + x)e^{2x}.$$
Inoltre
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$
La derivata prima della funzione è
$$f'(x) = (2x + 1)e^{2x} + 2(x^2 + x)e^{2x},$$
$$f'(x) = (2x + 1 + 2x^2 + 2x)e^{2x},$$
$$f'(x) = (2x^2 + 4x + 1)e^{2x}.$$
Quindi la derivata prima, nell'intervallo considerato, si annulla in $x = \frac{-4-2\sqrt{2}}{4}$ e in $x = \frac{-4+2\sqrt{2}}{4}$.

Dallo studio del segno della derivata segue che la funzione ha in $x = \frac{-4-2\sqrt{2}}{4}$ un punto di massimo relativo, mentre in $x = \frac{-4+2\sqrt{2}}{4}$ un punto di minimo relativo.

La derivata seconda vale
$$f''(x) = 2(2x^2 + 6x + 3)e^{2x}.$$
La derivata seconda si annulla per
$$x = \frac{-6 - 2\sqrt{3}}{4},$$
$$x = \frac{-6 + 2\sqrt{3}}{4}.$$
Per $\frac{-6+2\sqrt{3}}{4} < x < 0$ la derivata seconda è positiva, pertanto la funzione è convessa, tra le due radici la funzione è concava, mentre per $x < -\frac{-6-2\sqrt{3}}{4}$ la funzione è convessa.

La funzione è continua e derivabile in $x = 0$, mentre non esiste la derivata seconda in $x = 0$.

4. Abbiamo
$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x - 1|}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\sin^2 x} dx =$$
$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx =$$
$$\log|\tan(\frac{\pi}{6})| + \cot\frac{\pi}{3} = \log\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

11 ESERCIZI

1. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n! + 2^n)}{(n+1)!}.$$

2. Determinare e disegnare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \arcsin(\frac{x}{2}) + \sqrt{y}$$

e calcolare, ove esistono. le derivate parziali prime della funzione.

3. Studiare e disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}.$$

4. Calcolare

$$\int \frac{1}{5 - 3\cos x} dx.$$

SOLUZIONI

1. Abbiamo

$$\frac{(n! + 2^n)}{(n+1)!} \geq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Dunque la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n! + 2^n)}{(n+1)!}$$

è positivamente divergente.

2. L'insieme di definizione è

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, \quad y \geq 0\}.$$

Le derivate parziali prime sono date da

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}},$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

3. La funzione è definita per $x > 0$ e ivi continua e derivabile. Abbiamo

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$

e

$$f(1) = 0,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$
$$f'(x) = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}(1 - \frac{1}{2}\log x).$$

Da cui, risolvendo $f'(x) = 0$, troviamo

$$2 = \log x,$$
$$x = e^2$$

e

$$f(e^2) = \frac{2}{e}.$$

Abbiamo

$$f''(x) = \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}(\frac{3}{4}\log(x) - 2),$$
$$f''(e^2) < 0,$$

dunque il punto è di un punto di massimo relativo. Inoltre

$$x = e^{\frac{8}{3}}$$

è un punto di flesso.

Inoltre f è crescente per in $(0, e^2)$, decrescente in $(e^2, +\infty)$, concava per $(0, e^{\frac{8}{3}})$, convessa per $x > e^{\frac{8}{3}}$.

Da cui il grafico della funzione.

4. Poniamo

$$x = \text{arctg } t$$

ossia

$$t = \text{tg } \frac{x}{2}.$$

Da cui

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Inoltre

$$dx = \frac{2}{1 + t^2} dt,$$
$$\int \frac{1}{5 - 3\cos x} dx = \int \frac{2}{8t^2 + 2} dt = \int \frac{1}{4t^2 + 1} dt =$$

Poniamo

$$z = 2t$$
$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{z^2 + 1} dz = \frac{1}{2} \text{arctg } z.$$

Sostituendo z si ha

$$\int \frac{1}{5 - 3\cos x} dx = \frac{1}{2} \text{arctg } \left(2\text{tg } \frac{x}{2}\right).$$

12 ESERCIZI

1. Dopo aver dimostrato per induzione

$$\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}.$$

2. Calcolare il vettore gradiente della funzione

$$f(x,y,z) = y + \sin y \cos z + \arctan z$$

nel punto $(3, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$.

3. Studiare e disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{|x^3 - 1|}.$$

4. Calcolare l'integrale, al variare $0 < \lambda < 1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin \lambda x| \sin \lambda x dx.$$

SOLUZIONI

1. Abbiamo

$$\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Risulta vera per $n = 1$, infatti

$$\frac{1!}{1^1} \leq \frac{1}{2^0}$$

ossia $1 = 1$.

Supponiamola vera per n e dimostriamola per $n + 1$:

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)(n+1)^n} = \frac{n!(n+1)}{(n+1)n^n(1+\frac{1}{n})^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{2} = \frac{1}{2^n},$$

essendo

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \leq \frac{1}{2}.$$

Infatti,

$$(1 + \frac{1}{n})^n > 2,$$

poichè $(1+\frac{1}{n})^n$ è crescente e per $n=1$ assume il valore 2.

La serie è convergente. Infatti, per il criterio del confronto, basterà far vedere che è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{2^{n-1}}.$$

Per il criterio del rapporto tale serie risulta convergente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2^n}\frac{2^{n-1}}{n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

2. Le derivate parziali prime sono date da

$$f_x(x,y,z) = 0,$$

$$f_y(x,y,z) = 1 + \cos y \cos z,$$

$$f_z(x,y,z) = -\sin y \sin z + \frac{1}{1+z^2}.$$

Abbiamo

$$f_x(3,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}) = 0,$$

$$f_y(3,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}) = 1,$$

$$f_z(3,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{1+(\frac{\pi}{4})^2}.$$

3. La funzione è definita per ogni x reale, è continua, è inoltre derivabile in ogni punto $x \neq 1$.

$$f(x) = 0 \qquad \text{se} \qquad x = 1.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Si ha

$$x^3 - 1 > 0 \qquad \text{se} \qquad x > 1$$

.

Assumiamo $x > 1$. Calcoliamo la derivata

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}.$$

La funzione è crescente in $(1,+\infty)$. Inoltre

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty.$$

La derivata seconda è data da

$$f''(x) = \frac{3}{4(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}(-3x^4 + 4x(x^3-1)),$$

$$f''(x) = \frac{3}{4(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}(x^4 - 4x)),$$

$$f''(x) = \frac{3}{4(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}x(x^3 - 4)),$$

$$f''(x) = 0 \qquad \text{se} \qquad x = 4^{\frac{1}{3}} = 1.5874.$$

Per $x > 4^{\frac{1}{3}} = 1.5874$ la funzione è convessa, mentre per $1 < x < 1.5874$, la funzione è concava.

Assumiamo $x < 1$.

$$f'(x) = \frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}.$$

La funzione è decrescente in $(-\infty, 1)$. Si ha

$$f'(x) = 0 \qquad \text{se} \qquad x = 0.$$

Inoltre

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty.$$

La derivata seconda è data da

$$f''(x) = \frac{3}{4(1-x^3)^{\frac{3}{2}}}(-3x^4 - 4x(1-x^3)),$$

$$f''(x) = \frac{3}{4(1-x^3)^{\frac{3}{2}}}(x^4 - 4x)),$$

$$f''(x) = \frac{3}{4(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}x(x^3 - 4)).$$

Nell'intervallo di interesse

$$f''(x) = 0 \qquad x = 0.$$

Per $x > 0$ e $x < 1$ la funzione è concava, mentre per $-\infty < x < 0$, la funzione è convessa. Pertanto la funzione ha due punti di flesso $x = 0$ con $f(0) = 1$, e $x = 4^{\frac{1}{3}} = 1.5874$ con $f(1.5874) = 0.766421$.

Il punto $x = 1$ è un punto di cuspide.

Inoltre $f(1) < f(x)$, per ogni x in $\mathbb{R}$, quindi $x = 1$ è un punto di minimo assoluto.

Da cui il grafico della funzione.

4. Essendo $0 < \lambda < 1$, $0 < \lambda x < \frac{\pi}{2}$, quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin \lambda x| \sin \lambda x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \lambda x)^2 dx.$$

Sostituendo $\lambda x = t$, $\lambda dx = dt$, da cui $dx = \frac{1}{\lambda} dt$ Da cui l'integrale indefinito si risolve per sostituzione ed integrazione per parti (oppure fecendo uso di formule trigonometriche). Si ottiene

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2\lambda} \sin \frac{\lambda\pi}{2} \cos \frac{\lambda\pi}{2}.$$

13 ESERCIZI

1. Calcolare, motivando dettagliatamente il risultato,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(2x)}{x},$$

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x},$$

$$\lim_{n\to\infty} (\pi n)^{\frac{1}{n}},$$

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{2n})^n,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n} j^2.$$

2. Calcolare le tre radici cubiche del numero complesso $z = 4$.

3. Studiare e disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{\sin x - \cos x}.$$

4. Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi} |\sin x|\cos|x||\cos x|dx.$$

SOLUZIONI

1. Dal confronto

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin(2x)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

da cui

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(2x)}{x} = 0.$$

Risulta

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} (\pi n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (\pi)^{\frac{1}{n}} \lim_{n\to\infty} (n)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{2n})^n = \lim_{n\to\infty} ((1+\frac{1}{2n})^{2n})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n} j^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

2. Calcoliamo il modulo e l'argomento:

$$\rho = 4,$$
$$\theta = 0.$$

Risulta

$$z_1 = 4^{\frac{1}{3}},$$
$$z_2 = 4^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{2}{3} + i\sin\frac{2}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$z_2 = 4^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{4}{3} + i\sin\frac{4}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. La funzione è periodica pertando verrà studita in $[0, 2\pi]$. Insieme di definizione:

$$\sin x > \cos x$$

???

Limitandoci a $[0, 2\pi]$, abbiamo

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}.$$

In $x = \frac{\pi}{4}$ e in $\frac{5\pi}{4}$, $f(x) = 0$.

Inoltre la derivata prima vale

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin x - \cos x}}.$$

Quindi

$$f'(x) = 0$$

per $x = \frac{3}{4}\pi$. Inoltre

$$f(\frac{3}{4}\pi) = \sqrt{2}.$$

La derivata seconda vale

$$\frac{1}{2(\sin x - \cos x)^{\frac{3}{2}}}(-(-\cos x + \sin x)^2 - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)^2).$$

Essendo negativa, il punto è di massimo e la funzione concava.

Da cui il grafico.

4. Nell'insieme $[0, \frac{3\pi}{4}]$ la funzione $\sin x$ è non negativa, quindi

$$|\sin x| = \sin x$$

e anche x, quindi $|x| = x$, mentre $\cos x$ cambia segno e quindi

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} |\sin x| \cos|x| |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(\cos x)^2 dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x(\cos x)^2 dx,$$

quindi

$$\int_0^{\pi} |\sin x| \cos|x| dx = \frac{1}{3}(1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^3).$$

14 ESERCIZI

1. Calcolare, motivando dettagliatamente il risultato, l'estremo inferiore e superiore dei valori della funzione

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 3}{e^{2x} + 3}$$

definita su $\mathbb{R}$, specificando se esistono il massimo e il minimo di f su $\mathbb{R}$.

2. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

3. Studiare e disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \log |x^4 - 1|.$$

4. Dimostrare, utilizzando risultati di teoria, che

$$\int_0^1 e^{t^2} dt > \frac{43}{30}.$$

SOLUZIONI

1. La funzione è ovunque definita, la derivata prima è positiva dunque la funzione è crescente, l'estremo inferiore e superiore coincidono con i limiti per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 3}{e^{2x} + 3} = \frac{1 - \frac{3}{e^{2x}}}{1 + \frac{3}{e^{2x}}},$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1.$$

Non esistono il massimo e il minimo di f su $\mathbb{R}$.

2. La serie è divergente.

$$\sqrt{k^2 + 1} \leq \sqrt{k^2 + 1 + 2k} = k + 1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + 1} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} = +\infty.$$

Quindi
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \geq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} = +\infty.$$

3. La funzione è pari, la studiamo quindi in $[0, +\infty)$. Restringendoci a tale intervallo la funzione è ovunque definita eccetto $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1^+} \log|x^4 - 1| = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^-} \log|x^4 - 1| = -\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log|x^4 - 1| = +\infty,$$

$$f(0) = 0.$$

Inoltre, se $x > 1$, $x^4 - 1 > 0$, si ha

$$f(x) = \log|x^4 - 1| = \log(x^4 - 1),$$

$$f'(x) = \frac{4x^3}{x^4 - 1} > 0$$

per $x > 1$. Poichè $f'(x) > 0$ in $(1, +\infty)$ la funzione è crescente.

Abbiamo

$$f''(x) = \frac{12x^2(x^4-1) - 16x^6}{(x^4-1)^2} = \frac{-4x^6 - 12x^2}{(x^4-1)^2} < 0,$$

quindi la funzione è concava.

Per $0 \leq x < 1$ la funzione vale

$$f(x) = \log|x^4 - 1| = \log 1 - x^4,$$

$$f'(x) = \frac{-4x^3}{1 - x^4} \leq 0$$

per $0 \leq x < 1$, essendo 0 se $x = 0$. Per cui la funzione è decrescente in $(0, 1)$.

Abbiamo

$$f''(x) = \frac{-12x^2(1-x^4) - 16x^6}{(1-x^4)^2} = \frac{-4x^6 - 12x^2}{(1-x^4)^2} < 0,$$

quindi la funzione è concava.

Il punto $x = 0$ è un punto di massimo relativo.

Per simmetria si ottiene il grafico della funzione.

4. Abbiamo
$$e^{t^2} = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + R_4(t)$$
con
$$R_4(t) > 0$$

in $(0,1]$. Quindi
$$e^{t^2} \geq 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}$$
e
$$\int_0^1 e^{t^2} dt > \int_0^1 (1 + t^2 + \frac{t^4}{2}) dt = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{43}{30}.$$

15 ESERCIZI

1. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k.$$

2. Studiare e disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \tan x^2 + e^{-x^2}$$

nell'intervallo $(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$.

3. Calcolare l'area del triangolo che ha come estremi $(0,0)$, $(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, 0)$ e $(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, f(\frac{\sqrt{\pi}}{2}))$ con

$$f(x) = \tan x^2 + e^{-x^2} - 1.$$

Specificare (motivando la risposta) se tale area costituisce un'approssimazione per eccesso o per difetto dell'area della regione piana limitata individuata dall'asse x, dalle rette $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ e dal grafico della funzione f.

4. Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1-\sin^2 x} dx.$$

SOLUZIONI

1. La serie è positivamente divergente. Infatti

$$\frac{1}{k}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \geq \frac{2}{k}.$$

Il risultato segue allora dal confronto con la serie armonica.

2. Si ha che la funzione è pari, pertanto basterà studiarla in $(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$. Si ha

$$f(0) = 1$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$f'(x) = 2x\left(\frac{1}{\cos^2 x^2} - e^{-x^2}\right).$$

Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = 2\left(\frac{1}{\cos^2 x^2} - e^{-x^2}\right) + 4x^2\left(\frac{2\sin x^2}{\cos^3 x^2} + e^{-x^2}\right).$$

In $(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$ la derivata prima è positiva, pertanto la funzione è crescente. Per studiare la convessità possiamo operare in due modi.

a) Ricordare che:

Siano f, g due funzioni positive definite in un intervallo di $\mathbb{R}$. È semplice far vedere che se f e g risultano crescenti (non decrescenti) anche la funzione prodotto

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

risulta crescente (non decrescente).

b) Calcolare la derivata seconda .

Applicando uno dei due punti al nostro caso si ha
a) in $(0, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$ la funzione $f(x) = 2x$ è positiva, anche

$$g(x) = \frac{1}{\cos^2 x^2} - e^{-x^2}$$

è positiva, inoltre le funzioni in tale intervallo risultano crescenti. Pertanto la convessità segue dalla proprietà di monotonia della derivata.
b) Osservando che la derivata seconda in $(0, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$ è positiva.

La funzione risulta allora convessa, pertanto possiamo tracciare il grafico.
Il punto $x = 0$ risulta un punto di minimo assoluto della funzione del punto 3.
L'area del triangolo si ottiene:

$$A = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{-\pi}{4}}.$$

Inoltre tale area costituisce un'approssimazione per difetto, essendo la funzione convessa e dunque il suo grafico al di sotto della retta congiungente $(\sqrt{\frac{\pi}{4}}, e^{-\sqrt{\frac{\pi}{4}}})$ e $(0,0)$:

$$f(x) = \tan x^2 + e^{-x^2} - 1 \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{-\pi}{4}}x, \qquad x \in (0, \frac{\sqrt{\pi}}{2}).$$

Da cui il risultato segue per integrazione.